Matematyka A — egzamin
23 czerwca 2017 r., godz. 12:00 — 15:00

Rozwiązania różnych zadań należy napisać na różnych kartkach, bo sprawdzą je różne osoby. Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU imieniem i nazwiskiem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia.
Nie wolno korzystać z urządzeń elektronicznych (kalkulatorów, telefonów komórkowych itp.); posiadane muszą być schowane i wyłączone! Nie dotyczy rozruszników serca.
Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!
Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały *udowodnione* na wykładzie lub na ćwiczeniach.

Należy przeczytać **CAŁE** zadanie **PRZED** rozpoczęciem rozwiązywania go!

---

1. **(5 p.)** Wyznaczyć w zależności od liczb $\cos\alpha$ i $\sin\alpha$ liczby $\cos(2\alpha)$, $\sin(2\alpha)$ oraz $\cos(3\alpha)$.
(5 p.) Wyznaczyć w zależności od liczby $\operatorname{tg}\alpha \neq \pm 1$ liczby $\operatorname{tg}(2\alpha)$ oraz $\operatorname{ctg}(2\alpha)$.
Można ewentualnie skorzystać z wzoru de Moivre'a.

---

2. **(6 p.)** Rozpatrujemy różniczkowalne funkcje g określone na przedziałach złożonych z liczb dodatnich, o wartościach dodatnich. Dla każdej liczby x z dziedziny funkcji g oznaczamy: $f(x) = xg(x)$; $X = \big(x, f(x)\big)$; $T = (t(x), 0)$ — punkt wspólny stycznej w punkcie X do wykresu funkcji f i prostej $y = 0$, zakładamy, że $t(x) > 0$; $U = (2t(x), 0)$ i $O = (0, 0)$. Znaleźć wszystkie te funkcje g, dla których równość $\sphericalangle XTU = 2\sphericalangle XOU$ zachodzi dla każdej liczby x z dziedziny funkcji g.
(4 p.) Znaleźć funkcje g_1, g_2 spełniające warunek z pierwszej części tego zadania oraz: $f_1(5) = 5g_1(5) = 3$ i $f_2(3) = 3g_2(3) = 5$. Naszkicować wykresy funkcji f_1 i f_2.
W tym zadaniu można skorzystać z wzorów udowodnionych w zadaniu poprzednim.

---

3. **(6 p.)** Rozwiązać układ równań $\begin{cases} x'(t) = 11x(t) - 3y(t), \\ y'(t) = 12x(t) - y(t). \end{cases}$ $(\clubsuit)$
(4 p.) Znaleźć takie rozwiązanie układu równań $(\clubsuit)$, że $x(1) = 4e^5 = y(1)$.

---

4. **(3 p.)** Naszkicować zbiór $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad 5x - y^2 \leqslant 0 \leqslant y \quad \text{i} \quad (x-5)^2 + y^2 \leqslant 25\}$.
(3 p.) Znaleźć pole zbioru E.
(4 p.) Znaleźć środek ciężkości zbioru E zakładając, że jest on jednorodny.

---

5. Niech $f(x, y) = xy(x + y - 1)(x - y + 1)$ dla $x, y \in \mathbb{R}$. Zachodzą wtedy równości:
$$\tfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y(3x^2 - y^2 + 2y - 1) \text{ oraz } \tfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x(x^2 - 3y^2 + 4y - 1).$$
(3 p.) Znaleźć wszystkie punkty, w których gradient funkcji f jest wektorem zerowym.
(4 p.) Znaleźć lokalne ekstrema funkcji f.
(3 p.) W zbiorze $D = \{(x, y) : \quad -1 \leqslant x \leqslant 0 \text{ i } 0 \leqslant y \leqslant 1\}$ znaleźć punkty, w których funkcja $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ przyjmuje najmniejszą i największą wartość lub wykazać, że funkcja $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ którejś z nich lub obu nie ma.

---

6. **(10 p.)** Rozwiązać równanie
$$x''(t) + 4x'(t) + 13x(t) = 360\big(e^{-2t} + te^{-2t}\sin(3t) - \sin(3t)\big) + 169t^3.$$
