Matematyka A — kolokwium: godz. 18:05 — 20:00, 24 maja 2017 r. – rozwiązania

1. **(7 p.)** Znaleźć wszystkie takie funkcje $t \mapsto x(t)$, że dla każdego $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ zachodzi równość: $x'(t) - \left(1 + x(t)^2\right) \cdot \frac{2}{1+4t^2} = 0$.

(3 p.) Wśród znalezionych w poprzedniej części tego zadania funkcji znaleźć tę, dla której zachodzi warunek $x\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$.

Rozwiązanie. Całkując obustronnie równość $\frac{x'(t)}{1+x(t)^2} = \frac{2}{1+4t^2}$ otrzymujemy $\operatorname{arctg} x(t) = \operatorname{arctg}(2t) + c$ dla pewnej liczby c. Stąd otrzymujemy $x(t) = \operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}(2t) + c\right)$. Ma być spełniona równość

$$-1 = \operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}(2 \cdot \tfrac{-1}{2}) + c\right) = \operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}(-1) + c\right).$$

Z definicji funkcji arctg wynika, że $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg}(-1) < \frac{\pi}{2}$. Jednocześnie $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}(-1)\right) = -1$, zatem $c = 0$ lub $c = n\pi$ dla pewnej liczby całkowitej n. Wobec tego $x(t) = \operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}(2t) + n\pi\right)$ dla wszystkich $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ i pewnej liczby całkowitej n. □

---

2. **(10 p.)** W pokoju o objętości 200 m^3 powietrze zawiera w pewnej chwili 0,15% dwutlenku węgla. Powietrze z zewnątrz zawierające 0,04% dwutlenku węgla jest dostarczane przez wentylator w tempie 20 l/min. Po jakim czasie zawartość dwutlenku węgla w pokoju zmniejszy się trzykrotnie w porównaniu do chwili początkowej.

Dla uproszczenia zakładamy, że w powietrzu wydostającym się z pokoju stężenie dwutlenku węgla jest takie samo w każdym miejscu.

Rozwiązanie. Niech $x(t)$ oznacza ilość dwutlenku węgla znajdującego się w pokoju w chwili t. Mamy więc $x(0) = 0{,}0015 \cdot 200 = 0{,}3$. Szukamy τ, dla którego będzie spełniona równość $x(\tau) = 0{,}1$.

Załóżmy, że t jest dowolną liczbą dodatnią a $h \neq 0$ liczbą o malutkiej wartości bezwzględnej. Możemy wtedy napisać przybliżoną równość

$$x(t+h) - x(t) \approx 0{,}0004 \cdot \tfrac{20}{1000} \cdot h - \tfrac{x(t)}{200} \cdot \tfrac{20}{1000} \cdot h, \text{ czyli}$$
$$\tfrac{x(t+h)-x(t)}{h} \approx 0{,}0004 \cdot \tfrac{20}{1000} - \tfrac{x(t)}{200} \cdot \tfrac{20}{1000}.$$

Wobec tego $x'(t) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{x(t+h)-x(t)}{h} = 0{,}0004 \cdot \frac{20}{1000} - \frac{x(t)}{200} \cdot \frac{20}{1000} = 8 \cdot 10^{-6} - x(t) \cdot 10^{-4}$. Wobec tego

$$t + C = \int \mathrm{d}t = \int \frac{x'(t)\mathrm{d}t}{8 \cdot 10^{-6} - x(t) \cdot 10^{-4}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{8 \cdot 10^{-6} - x \cdot 10^{-4}} = -10^4 \ln|8 \cdot 10^{-6} - x \cdot 10^{-4}|\,.$$

Mamy więc $-10^{-4}(t + C) = \ln\left(x \cdot 10^{-4} - 8 \cdot 10^{-6}\right)$, zatem

$$x(t) = 8 \cdot 10^{-2} + 10^4 e^{-10^{-4}(t+C)} = 0{,}08 + 10\,000 e^{-0{,}0001C} \cdot e^{-0{,}0001t}\,.$$

Ponieważ $x(0) = 0{,}3$, więc $10\,000e^{-0{,}0001C} = 0{,}22$ i wobec tego $x(t) = 0{,}08 + 0{,}22 \cdot e^{-0{,}0001t}$. Z tej równości wynika, że $0{,}1 = 0{,}08 + 0{,}22 \cdot e^{-0{,}0001\tau}$, więc $\frac{1}{11} = \frac{0{,}02}{0{,}22} = e^{-0{,}0001\tau}$, zatem $\tau = 10\,000 \cdot \ln 11 \approx 2{,}4 \cdot 10\,000 = {=}24\,000$. Ilość dwutlenku węgla osiągnie wartość $0,1$ (metra sześciennego) po około 24 000 minut, więc po upływie około 400 godzin, czyli po $\frac{400}{24} = 16\frac{2}{3}$ dobach.

Miało być trochę inaczej, ale pomyliłem się pisząc zadanie. Chciałem napisać „w tempie 20 m^3/min". Wtedy odpowiedzią byłoby $\approx$ 24 min. Na szczęście żadnego wpływu na metodę rozwiązywania ta pomyłka nie miała. □

---

3. **(10 p.)** Rozwiązać równanie

$$x''(t) - 2x'(t) - 15x(t) = 64te^{5t} + (100t^2 - 2)e^{-5t} - 225t^2 - 2 + 102\cos(3t).$$

Rozwiązanie. Rozwiążemy kolejno równania:
$x_0''(t)-2x_0'(t)-15x_0(t)=0$, $x_1''(t)-2x_1'(t)-15x_1(t)=64te5t$, $x_2''(t)-2x_2'(t)-15x_2(t)=(100t^2-2)e^{-5t}$, $x_3''(t)-2x_3'(t)-15x_3(t)=-225t^2-2$, $x_4''(t)-2x_4'(t)-15x_4(t)=102\cos(3t)$.
Równanie charakterystyczne w tym wypadku ma postać
$$0=\lambda^2-2\lambda-15=(\lambda-1)^2-16=(\lambda-1-4)(\lambda-1+4)=(\lambda-5)(\lambda+3),$$
zatem jego pierwiastkami są liczby 5 oraz -3. Rozwiązanie ogólne równania jednorodnego wygląda więc tak $x_0(t)=c_1e^{5t}+c_2e^{-3t}$, gdzie c_1,c_2 są dowolnymi liczbami.

Aby rozwiązać następne równania wystarczy wskazać jedno rozwiązanie każdego z nich (rozwiązanie szczególne), bo każde inne rozwiązanie powstanie przez dodanie do znalezionego rozwiązania szczególnego funkcji x_0.

Wiadomo z zajęć, że równanie $x_1''(t)-2x_1'(t)-15x_1(t)=64te5t$ ma rozwiązanie postaci $w(t)e^{5t}$, gdzie w oznacza pewien wielomian zmiennej t. Zachodzą równości:
$(w(t)e^{5t})'=w'(t)e^{5t}+w(t)\cdot 5e^{5t}=\big(w'(t)+5w(t)\big)e^{5t}$ oraz
$(w(t)e^{5t})''=\Big(\big(w'(t)+5w(t)\big)e^{5t}\Big)'=\big(w''(t)+5w'(t)+5(w'(t)+5w(t))\big)e^{5t}=\big(w''(t)+10w'(t)+25w(t)\big)e^{5t}$.
Po podstawieniu $x_1(t)=w(t)e^{5t}$ drugie równanie przybiera postać
$$64te^{5t}=\big(w(t)e^{5t}\big)''-2\big(w(t)e^{5t}\big)'-15w(t)e^{5t}=\big(w''(t)+8w'(t)\big)e^{5t}.$$
Dla każdego t powinna zachodzić więc równość $64t=w''(t)+8w'(t)$. Stopień wielomianu $w''(t)+8w'(t)$ jest równy stopniowi wielomianu $w'(t)$, bo stopień wielomianu $w''(t)$ jest mniejszy o 1 od stopnia wielomianu $w'(t)$, zatem stopień wielomianu $w'(t)$ jest równy 1. Wobec tego istnieją takie liczby a,b, że dla każdej liczby t zachodzi równość $w'(t)=at+b$. Wtedy $w''(t)=a$ dla każdego t, zatem $64t=w''(t)+8w'(t)=a+8at+8b$. Wystarczy więc aby spełnione były równości $64=8a$ i $0=a+8b$, czyli $a=8$ i $b=-1$. Wynika stąd, że zachodzi równość $w(t)=\int(8t-1)\mathrm{d}t=4t^2-t+\mathrm{const}$, zatem $x_1(t)=(4t^2-t)e^{5t}$.

Znajdziemy $x_2(t)$. Z twierdzeń z wykładu wynika, że istnieje rozwiązanie postaci $w(t)e^{-5t}$. Obliczamy: $(w(t)e^{-5t})'=\big(w'(t)-5w(t)\big)e^{-5t}$ oraz $(w(t)e^{-5t})''=\big(w''(t)-10w'(t)+25w(t)\big)e^{-5t}$. Podstawiając do równania otrzymujemy
$$(100t^2-2)e^{-5t}=\big(w(t)e^{-5t}\big)''-2\big(w(t)e^{-5t}\big)'-15w(t)e^{-5t}=\big(w''(t)-12w'(t)+20w(t)\big)e^{-5t}.$$
Oznacza to, że dla każdego t powinna zachodzić równość $100t^2-2=w''(t)-12w'(t)+20w(t)$, zatem stopień wielomianu w powinien być równy 2, więc powinny istnieć takie liczby a,b,c, że dla każdego t zachodzi równość: $w(t)=at^2+bt+c$, zatem $100t^2-2=w''(t)-12w'(t)+20w(t)=20at^2+(20b-24a)t+20c-12b+2a$. Porównując współczynnik przy potęgach t po obu stronach równości otrzymujemy wzory $100=20a$, $0=20b-24a$ oraz $-2=20c-12b+2a$, zatem $a=5$, $b=6$ i $c=3$. Wykazaliśmy, że $x_2(t)=(5t^2+6t+3)e^{-5t}$.

Kolej na równanie $x_3''(t)-2x_3'(t)-15x_3(t)=-225t^2-2$. Z twierdzeń udowodnionych na wykładzie wynika istnienie rozwiązania, które jest wielomianem. Załóżmy, że x_3 jest wielomianem. Ponieważ stopień wielomianu $x_3''(t)-2x_3'(t)-15x_3(t)$ jest równy stopniowi wielomianu x_3, a z drugiej strony stopniowi wielomianu $-225t^2-2$, więc jest równy 2. Przyjmijmy, że $x_3(t)=at^2+bt+c$. Po podstawieniu do równania otrzymujemy: $-225t^2-2=-15at^2-(15b+4a)t-15c-2b+2a$. Porównujemy współczynniki przy odpowiednich potęgach zmiennej t po obu stronach tej równości $-225=-15a$, $0=-15b-4a$ i $-2=-15c-2b+2a$. Stąd $a=15$, $b=-4$ i $c=\frac{40}{15}=\frac{8}{3}$. Możemy więc napisać $x_3(t)=15t^2-4t+\frac{8}{3}$.

Zostało ostatnie równanie $x_4''(t) - 2x_4'(t) - 15x_4(t) = 102\cos(3t) = \mathrm{Re}\,(102e^{3it})$. Rozwiążemy najpierw równanie $x_5''(t) - 2x_5'(t) - 15x_5(t) = 102e^{3it}$, a potem podstawimy $x_4(t) = \mathrm{Re}\,(x_5(t))$. Istnieje rozwiązanie postaci $w(t)e^{3it}$. Mamy $\big(w(t)e^{3it}\big)' = \big(w'(t) + 3iw(t)\big)e^{3it}$ i $\big(w(t)e^{3it}\big)'' = \big(w''(t) + 6iw'(t) - 9w(t)\big)e^{3it}$. Podstawiając do równania otrzymujemy

$$102e^{3it} = \big(w(t)e^{3it}\big)'' - 2\big(w(t)e^{3it}\big)' - 15w(t)e^{3it} = \left(w''(t) + (6i-2)w'(t) - (9+6i+15)w(t)\right)e^{3it}.$$

Wynika stąd od razu, że $102 = w''(t) + (6i-2)w'(t) - (9+6i+15)w(t)$, więc stopień wielomianu w jest równy 0, co oznacza, że $w(t) = a$ dla pewnej liczby a i każdej liczby t, w szczególności $w'(t) = 0 = w''(t)$ dla każdego t. Wobec tego $102 = -(24+6i)a$, zatem $a = \frac{-1}{24+6i} = \frac{-102(4-i)}{6(4+i)(4-i)} = \frac{-102(4-i)}{6\cdot 17} = -4+i$, zatem $x_5(t) = (-4+i)e^{3it} = (-4+i)\big(\cos(3t) + i\sin(3t)\big)$, więc

$$x_4(t) = \mathrm{Re}\,\big(x_5(t)\big) = \mathrm{Re}\,(-4+i)\big(\cos(3t) + i\sin(3t)\big) = -4\cos(3t) - \sin(3t).$$

Ostatecznie otrzymujemy

$$x(t) = c_1e^{5t} + c_2e^{-3t} + (4t^2 - t)e^{5t} + (5t^2 + 6t + 3)e^{-5t} + 15t^2 - 4t + \tfrac{8}{3} - 4\cos(3t) - \sin(3t).$$

Dodajmy jeszcze, że można udawać, że nie używamy liczb zespolonych i poszukiwać rozwiązania równania $x_4''(t) - 2x_4'(t) - 15x_4(t) = 102\cos(3t)$ w postaci $a\cos(3t) + b\sin(3t)$ - w tym miejscu po raz pierwszy w tym zadaniu korzystam od razu z tego, że stopień wielomianu 102, więc liczba 0, nie jest zwiększany, bo liczba $3i$ nie jest pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego. Otrzymujemy

$$\big(a\cos(3t) + b\sin(3t)\big)'' - 2\big(a\cos(3t) + b\sin(3t)\big)' - 15\big(a\cos(3t) + b\sin(3t)\big) =$$
$$= (-9a - 6b - 15a)\cos(3t) + (-9b + 6a - 15b)\sin(3t) = -(24a + 6b)\cos(3t) + (6a - 24b)\sin(3t)$$

i wobec tego muszą zachodzić równości $24a + 6b = -102$ i $6a - 24b = 0$. Stąd $a = 4b$ i wobec tego $-102 = 24\cdot 4b + 6b = 102b$, więc $b = -1$ i $a = -4$. Oznacza to, że $x_4(t) = -4cos(3t) - \sin(3t)$, jak poprzednio. □

---

4. (10 p.) Rozwiązać równanie $x''(t) - 4x'(t) + 5x(t) = 8e^{2t}\cos t + 8e^{2t} + 4\cos t + 12\sin(2t)$.

Rozwiązanie. Zaczniemy od równania charakterystycznego

$$0 = \lambda^2 - 4\lambda + 5 = (\lambda - 2)^2 + 1 = (\lambda - 2 - i)(\lambda - 2 + i).$$

Stąd wynika, że rozwiązanie ogólne równania jednorodnego ma postać

$$x_0(t) = D_1e^{(2+i)t} + D_2e^{(2-i)t} = (D_1 + D_2)e^{2t}\cos t + i(D_1 - D_2)e^{2t}\sin t = C_1e^{2t}\cos t + C_2e^{2t}\sin t.$$

D_1, D_2 oznaczają dowolne liczby zespolone, $C_1 = D_1 + D_2$, $C_2 = i(D_1 - D_2)$. Można też wyrazić liczby D_1, D_2 za pomocą liczb C_1, C_2: $D_1 = \frac{1}{2}(C_1 - iC_2)$, $D_2 = \frac{1}{2}(C_1 + iC_2)$.

Znajdziemy jakieś rozwiązanie równania $x_1''(t) - 4x_1'(t) + 5x_1(t) = 8e^{2t}\cos t = \mathrm{Re}\,\big(e^{(2+i)t}\big)$. Wiadomo z zajęć, że istnieje rozwiązanie równania $x_2''(t) - 4x_2'(t) + 5x_2(t) = 8e^{(2+i)t}$ postaci $w(t)e^{(2+i)t}$, gdzie w jest pewnym wielomianem i wtedy można przyjąć, że $x_1 = \mathrm{Re}\,(x_2)$. Podstawiamy $x_2(t) = w(t)e^{(2+i)t}$ do równania i otrzymujemy

$$8e^{(2+i)t} = \big(w(t)e^{(2+i)t}\big)'' - 4\big(w(t)e^{(2+i)t}\big)' + 5w(t)e^{(2+i)t} =$$
$$= e^{(2+i)t}\big(w''(t) + 2(2+i)w'(t) + (2+i)^2 - 4w'(t) - 4(2+i)w(t) + 5w(t)\big) = e^{(2+i)t}\big(w''(t) + 2iw'(t)\big).$$

Stąd wynika, że ma zachodzić równość $8 = w''(t) + 2iw'(t)$, a ona wymusza, by $w'(t) = -4i$, więc $w''(t) = 0$ oczywiście dla każdego t. Wynika stąd, że $x_2(t) = -4ite^{(2+i)t} = 4te^{2t}\big(-i\cos t + \sin t\big)$. Wobec tego $x_1(t) = \mathrm{Re}\,\Big(4te^{2t}\big(-i\cos t + \sin t\big)\Big) = 4te^{2t}\sin t$.

Teraz zajmiemy się równaniem $x_3''(t) - 4x_3'(t) + 5x_3(t) = 4\cos t = \mathrm{Re}\left(4e^{it}\right)$. Najpierw znajdziemy rozwiązanie równania $x_5''(t) - 4x_5'(t) + 5x_5(t) = 4e^{it}$. Wiadomo, że istnieje taki wielomian w, że funkcja $w(t)e^{it}$ spełnia ostanie równanie. Podstawiając otrzymujemy

$$4e^{it} = \big(w(t)e^{it}\big)'' - 4\big(w(t)e^{it}\big)' + 5w(t)e^{it} = e^{it}\big(w''(t) + 2iw'(t) - w(t) - 4w'(t) - 4iw(t) + 5w(t)\big) = \\ = e^{it}\big(w''(t) + (2i-4)w'(t) + (4-4i)w(t)\big).$$

Stąd wynika równość $4 = w''(t) + (2i-4)w'(t) + (4-4i)w(t)$, a z niej z kolei wnioskujemy, że $w(t) = \frac{4}{4-4i} = \frac{1}{1-i} = \frac{1+i}{2}$ i siłą rzeczy $w'(t) = 0 = w''(t)$ dla każdego t. Stąd $x_5(t) = \frac{1+i}{2}e^{it} = \frac{1+i}{2}\big(\cos t + i\sin t\big)$, zatem $x_3(t) = \mathrm{Re}\Big(\frac{1+i}{2}\big(\cos t + i\sin t\big)\Big) = \frac{1}{2}\big(\cos t - \sin t\big)$.

Kolej na równanie $x_4''(t) - 4x_4'(t) + 5x_4(t) = 12\sin(2t) = \mathrm{Im}\big(12e^{2it}\big)$. Zaczniemy od równania zespolonego $x_6''(t) - 4x_6'(t) + 5x_6(t) = 12e^{2it}$. Możemy przyjąć, że $x_6(t) = w(t)e^{2it}$ dla pewnego wielomianu w. Podstawiamy do równania i otrzymujemy:

$$12e^{2it} = \big(w(t)e^{2it}\big)'' - 4\big(w(t)e^{2it}\big)' + 5w(t)e^{2it} = e^{2it}\big(w''(t) + 4iw'(t) - 4w(t) - 4w'(t) - 8iw(t) + 5w(t)\big) =$$

$= e^{2it}\big(w''(t) + (-4+4i)w'(t) + (1-8i)w(t)\big)$. Wobec tego $12 = w''(t) + (-4+4i)w'(t) + (1-8i)w(t)$. Oznacza to, ze wielomian w jest stałą (jego stopień jest równy 0), zatem $w''(t) = 0 = w'(t)$ dla każdego t i $w(t) = \frac{12}{1-8i} = \frac{12(1+8i)}{65}$. Otrzymujemy teraz $x_4(t) = \mathrm{Im}\big(\frac{12(1+8i)}{65}e^{2it}\big) = \mathrm{Im}\big(\frac{12(1+8i)}{65}(\cos(2t) + i\sin(2t)\big) =$ $=\frac{12}{65}\big(8\cos(2t) + \sin(2t)\big)$. Możemy w końcu napisać, że ogólnym rozwiązaniem równania jest funkcja $C_1e^{2t}\cos t + C_2e^{2t}\sin t + 4te^{2t}\sin t + \frac{1}{2}\big(\cos t - \sin t\big) + \frac{12}{65}\big(8\cos(2t) + \sin(2t)\big)$. $\square$

Uwaga. Osoby, które pamiętają jak zależy stopień quasi-wielomianu od wykładnika i pierwiastków wielomianu charakterystycznego widzą od razu, że gdy po prawej stronie w ostatnim przykładzie występuje jedna z funkcji: $12\sin(2t)$, $4\cos t$ bądź $8e^{2t}$, to rozwiązanie jest iloczynem stałej i funkcji wykładniczej, więc obliczeniach jest prościej, bo wtedy $w'(t) = 0 = w''(t)$, a to skraca wzory. Podobnie jest, gdy po prawej stronie występuje funkcja $8e^{2t}\cos t$, ale w tym wypadku w jest wielomianem pierwszego stopnia (bo $2+i$ jest jednokrotnym pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego, więc stopień trzeba zwiększyć o 1), w którym wyraz wolny można od razu opuścić, bo równanie nie wprowadza nań żadnych ograniczeń (wystarczy spojrzeć na rozwiązanie ogólne równania jednorodnego). Bardzo zachęcam studentki i studentów do prześledzenia tych rozumowań uwzględniając dodatkowe informacje na temat wielomianu w, liczę na to, że przynajmniej kilka osób zdecyduje się użyć kartki papieru i pisadła w celu przekonania się, że to trochę upraszcza i skraca zapis zwłaszcza, gdy wielomian w jest stałą. $\square$

---

5. **(2 p.)** Obliczyć $\frac{d}{dt}\left(2\sqrt{1+t^2} - \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)$. Wynik uprościć.

(8 p.) Rozwiązać równanie $x''(t) - 4x'(t) + 4x(t) = \frac{3}{(1+t^2)^{5/2}}e^{2t}$.

Rozwiązanie.

Mamy

$$\frac{d}{dt}\left(2\sqrt{1+t^2} - \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right) = 2\frac{d}{dt}\left(1+t^2\right)^{1/2} - \frac{d}{dt}\left(1+t^2\right)^{-1/2} = 2\cdot\frac{1}{2}\left(1+t^2\right)^{1/2-1}\cdot 2t + \frac{1}{2}\left(1+t^2\right)^{-1/2-1}\cdot 2t = \\ = 2t\left(1+t^2\right)^{-1/2} + t\left(1+t^2\right)^{-3/2}.$$

Zróżniczkujmy raz jeszcze, choć nic nas do tego nie zmusza:

$$\frac{d}{dt}\left(2t\left(1+t^2\right)^{-1/2} + t\left(1+t^2\right)^{-3/2}\right) = 2\Big(\left(1+t^2\right)^{-1/2} - t^2\left(1+t^2\right)^{-3/2}\Big) + \left(1+t^2\right)^{-3/2} - 3t^2\left(1+t^2\right)^{-5/2} = \\ = 2\left(1+t^2\right)^{-3/2} + \left(1+t^2\right)^{-3/2} - 3t^2\left(1+t^2\right)^{-5/2} = 3\left(1+t^2\right)^{-3/2} - 3t^2\left(1+t^2\right)^{-5/2} = 3\left(1+t^2\right)^{-5/2}.$$

Teraz zajmiemy się drugą częścią zadania. Zaczniemy, jak zwykle w przypadku równania liniowego, od rozwiązania równania jednorodnego. Równanie charakterystyczne wygląda tak $0 = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2$, więc $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, a to oznacza, że funkcja $x_0(t) = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t}$ jest rozwiązaniem ogólnym równania jednorodnego, tu c_1 i c_2 oznaczają liczby.

Rozwiązanie równania niejednorodnego znajdziemy w postaci $x_1(t) = c_1(t)e^{2t} + c_2(t)te^{2t}$, gdzie c_1 i c_2 oznaczają pewne funkcje. Założymy przy tym dodatkowo, że $c_1'(t)e^{2t} + c_2'(t)te^{2t} = 0$. Mamy

$$\tfrac{3}{(1+t^2)^{5/2}}e^{2t} = \big(c_1(t)e^{2t} + c_2(t)te^{2t}\big)'' - 4\big(c_1(t)e^{2t} + c_2(t)te^{2t}\big)' + 4\big(c_1(t)e^{2t} + c_2(t)te^{2t}\big) =$$
$$= \big(c_1'(t)e^{2t} + c_2'(t)te^{2t} + c_1(t)(e^{2t})' + c_2(t)(te^{2t})'\big)' - 4\big(c_1'(t)e^{2t} + c_2'(t)te^{2t} + c_1(t)(e^{2t})' + c_2(t)(te^{2t})'\big) +$$
$$+ 4\big(c_1(t)e^{2t} + c_2(t)te^{2t}\big) \xlongequal[\textit{założenie}]{\text{dodatkowe}}$$
$$= \big(c_1(t)(e^{2t})' + c_2(t)(te^{2t})'\big)' - 4\big(c_1(t)(e^{2t})' + c_2(t)(te^{2t})'\big) + 4\big(c_1(t)e^{2t} + c_2(t)te^{2t}\big) =$$
$$= c_1'(t)(e^{2t})' + c_2'(t)(te^{2t})' + c_1(t)\big((e^{2t})'' - 4(e^{2t})' + 4e^{2t}\big) + c_2(t)\big((te^{2t})'' - 4(te^{2t})' + 4te^{2t}\big) =$$

$= c_1'(t)(e^{2t})' + c_2'(t)(te^{2t})'$ – ostatnie równość wynika z tego, że funkcje e^{2t} i te^{2t} są rozwiązaniami równania jednorodnego. Okazuje się więc, że funkcje c_1' i c_2' spełniają układ równań liniowych

$$\begin{cases} c_1'(t)e^{2t} + c_2'(t)te^{2t} = 0, \\ c_1'(t)(e^{2t})' + c_2'(t)(te^{2t})' = \frac{3}{(1+t^2)^{5/2}}e^{2t}. \end{cases}$$

Zachodzi więc równość $\frac{3}{(1+t^2)^{5/2}}e^{2t} = 2c_1'(t)e^{2t} + 2c_2'(t)te^{2t} + c_2'(t)e^{2t} \xlongequal[\textit{równania}]{\textit{z pierwszego}} c_2'(t)e^{2t}$. Prowadzi to do równości $c_2'(t) = \frac{3}{(1+t^2)^{5/2}}$, zatem

$$c_2(t) = \int \tfrac{3dt}{(1+t^2)^{5/2}} \xlongequal[dt=(1+\operatorname{tg}^2 s)ds]{t=\operatorname{tg} s} \int \tfrac{3ds}{(1+\operatorname{tg}^2 s)^{3/2}} = \int 3\cos^3 s ds = \int 3\cos s(1-\sin^2 s)ds = 3\sin s - \sin^3 s + d_2 =$$
$$= \tfrac{3\operatorname{tg} s}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 s}} - \Big(\tfrac{\operatorname{tg} s}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 s}}\Big)^3 + d_2 = \tfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}\Big(3 - \tfrac{t^2}{1+t^2}\Big) + d_2 = \tfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}\Big(2 + \tfrac{1}{1+t^2}\Big) + d_2 = 2t\,(1+t^2)^{-1/2} + t\,(1+t^2)^{-3/2} + d_2.$$

Zachodzi równość $c_1'(t) = -tc_2'(t) = -3t(1+t^2)^{-5/2}$, zatem $c_1(t) = \int -3t(1+t^2)^{-5/2} = (1+t^2)^{-3/2} + d_1$. Stąd otrzymujemy $x(t) = \big((1+t^2)^{-3/2} + d_1\big)e^{2t} + \big(2t\,(1+t^2)^{-1/2} + t\,(1+t^2)^{-3/2} + d_2\big)te^{2t}$. Oczywiście d_1, d_2 oznaczają tu dowolne stałe. □

Uwaga. 1° Można otrzymany wzór uprościć:

$$x(t) = \big((1+t^2)^{-3/2} + d_1\big)e^{2t} + \big(2t\,(1+t^2)^{-1/2} + t\,(1+t^2)^{-3/2} + d_2\big)te^{2t} =$$
$$= e^{2t}\big((1+t^2)^{-3/2} + 2t^2\,(1+t^2)^{-1/2} + t^2\,(1+t^2)^{-3/2}\big) + d_1e^{2t} + d_2te^{2t} =$$
$$= e^{2t}(1+2t^2)\,(1+t^2)^{-1/2} + d_1e^{2t} + d_2te^{2t} = e^{2t}\big(2\sqrt{1+t^2} - \tfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}\big) + d_1e^{2t} + d_2te^{2t}.$$

2° Chociaż prawa strona równania nie jest quasi-wielomianem, można szukać rozwiązania równania w postaci $g(t)e^{2t}$ oczywiście nic o funkcji g nie zakładając poza co najmniej dwukrotną różniczkowalnością. Po podstawieniu otrzymujemy

$$\tfrac{3}{(1+t^2)^{5/2}}e^{2t} = \big(g(t)e^{2t}\big)'' - 4\big(g(t)e^{2t}\big)' + 4g(t)e^{2t} = \Big(\big(g(t)e^{2t}\big)' - 2g(t)e^{2t}\Big)' - 2\Big(\big(g(t)e^{2t}\big)' - 2g(t)e^{2t}\Big) =$$
$$= \Big(g'(t)e^{2t} + 2g(t)e^{2t} - 2g(t)e^{2t}\Big)' - 2\Big(g'(t)e^{2t} + 2g(t)e^{2t} - 2g(t)e^{2t}\Big) = \Big(g'(t)e^{2t}\Big)' - 2g'(t)e^{2t} = g''(t)e^{2t}.$$

Stąd wnioskujemy, że $g''(t) = \frac{3}{(1+t^2)^{5/2}}$, zatem $g'(t) = 2t(1+t^2)^{-1/2} + t(1+t^2)^{-3/2} + \gamma$ i w końcu $g(t) = 2\sqrt{1+t^2} - \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} + \gamma t + \delta$. W końcówce tej uwagi skorzystaliśmy z rezultatów obliczeń, od których rozpoczęliśmy rozwiązanie tego zadania. □