Matematyka A — kolokwium
26 kwietnia 2017 r., godz. 18:05 — 20:00

Starałem się nie popełniać błędów, ale jeśli są, będę wdzięczny za wieści o nich

Mam też nadzieję, że niektórzy studenci zechcą zrozumieć poniższy tekst, w końcu kilka dni wolnych, a może warto spróbować coś zrozumieć. Po rozwiązaniu zadania piątego są jakieś uwagi…

1. (5 p.) Znaleźć wszystkie takie liczby zespolone z, że $z^3 + 2z^2 + 5z - 26 = 0$

(5 p.) Obliczyć $\left(\sqrt{3} + i\right)^{10}$ oraz $\left(\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{2017}$.

Rozwiązanie. Mamy $2^3 + 2 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2 - 26 = 0$ i wobec tego $0 = z^3 + 2z^2 + 5z - 26 = (z-2)(z^2+4z+13) = (z-2)\big((z+2)^2+9\big)$. Liczby: 2, $-2+3i$, $-2-3i$ są pierwiastkami.

$\left(\sqrt{3}+i\right)^{10} = \left(2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})\right)^{10} = 1024(\cos\frac{10\pi}{6}+i\sin\frac{10\pi}{6}) = 1024(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}) = 1024\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 512 - 512\sqrt{3}i.$ □

---

2. (10 p.) Znaleźć wszystkie takie liczby zespolone z, że $|z^4+2| + z^2\bar{z}^2 = 2$.

Rozwiązanie. $2 = |z^4+2| + z^2\bar{z}^2 = |z^4 - (-2)| + |z^4|$, czyli suma odległości liczby z^4 od liczb 0 i -2 jest równa 2, a to oznacza, że liczba z^4 znajduje się na odcinku o końcach -2 i 0, więc jest liczbą niedodatnią o wartości bezwzględnej nie większej od 2. Wynika stąd od razu, że liczba z musi być postaci $r\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{4} + \sin\frac{\pi+2k\pi}{4}\right)$, przy czym k oznacza tu dowolną liczbę całkowitą, a r liczbę nieujemną, nie większą od $\sqrt[4]{2}$. Ponieważ liczby, których argumenty różnią się o 2π (o tej samej wartości bezwzględnej) pokrywają się , więc wystarczy rozpatrywać cztery kolejne liczby całkowite, np. $0; 1; 2; 3$. Otrzymujemy więc rozwiązania $r(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$, $r(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4})$, $r(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4})$ oraz $r(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4})$. Geometrycznie zbiór rozwiązań to suma czterech odcinków o długości $\sqrt[4]{2}$, wychodzących z punktu 0 pod kątami $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$ i $\frac{7\pi}{4}$ do dodatniej półosi rzeczywistej. □

---

3. (2 p.) Niech O będzie zbiorem złożonym ze wszystkich takich liczb zespolonych z, że $|15+8i-z| = 17$. Naszkicować w układzie współrzędnych zbiór O.

(1 p.) Opisać równaniem (zespolonym lub rzeczywistym) i naszkicować zbiór Q złożony ze wszystkich takich liczb zespolonych $\bar{z}$, że $z \in O$.

(3 p.) Opisać równaniem (zespolonym lub rzeczywistym) i naszkicować zbiór P złożony ze wszystkich takich liczb zespolonych $-i\bar{z}$, że $z \in O$.

(4 p.) Znaleźć wszystkie elementy zbioru $O \cap P$.

Rozwiązanie. Zbiór O to oczywiście okrąg, którego środkiem jest punkt $15+8i$, a promieniem liczba 17. Mamy $15^2 + 8^2 = 17^2$, bo $17^2 - 15^2 = (17-15)(17+15) = 2 \cdot 32 = 2^6 = 8^2$. Przecina on oś rzeczywistą w punktach 0 i 30, a oś urojoną w punktach 0 i $8i$. Q to zbiór symetryczny do O względem osi rzeczywistej, więc okrąg o środku $\overline{15+8i} = 15-8i$ i promieniu 17. Zbiór P powstaje ze zbioru Q przez obrót wokół punktu 0 o $\frac{\pi}{2}$ w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, więc okrąg o środku $-i(15-8i) = -8-15i$ i promieniu 17. Przecina on oś rzeczywistą w punktach 0 i -16, a oś urojoną w punktach 0 i $-30i$. Jego równanie to $|-8-15i-z| = 17$. Przyjmij, że $z = x+yi$, $x, y \in \mathbb{R}$. Jeśli $z = x+yi$ jest punktem wspólnym P i O, to spełnione są równości $(-8-x)^2 + (-15-y)^2 = 17^2$ oraz $(15-x)^2 + (8-y)^2 = 17^2$. Po ich odjęciu stronami i skorzystaniu z wzoru $u^2 - v^2 = (u-v)(u+v)$

otrzymujemy $(-23)(7-2x)+(-23)(-7-2y)=0$, co po podzieleniu przez -23, redukcji i podzieleniu przez -2 daje równość $x+y=0$, czyli $y=-x$. Wstawiwszy to do pierwszego równania otrzymujemy $17^2=(15-x)^2+(8-y)^2=(15-x)^2+(8+x)^2=15^2+8^2-30x+16x+2x^2$, czyli $0=-14x+2x^2$, więc $x=0$ i $x=7$, zatem punktami wspólnymi tych okręgów są liczby zespolone 0 oraz $7-7i$. Możemy więc zapisać tę odpowiedź w postaci $O\cap P=\{0,7-7i\}$, ale poprzednie zdanie też można uznać za zakończenie rozwiązania. $\square$

---

4. Niech $M=\begin{pmatrix}5&-1&-4\\-1&1&2\\2&-1&-1\end{pmatrix}$, $\mathbf{v}=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$, $\mathbf{w}=\begin{pmatrix}2&0&1\end{pmatrix}$, $\mathbf{u}=\begin{pmatrix}1&0&-1\end{pmatrix}$.

(1 p.) Obliczyć $M\cdot\mathbf{v}$, $\mathbf{w}\cdot M$ oraz $\mathbf{u}\cdot M$.

(2 p.) Znaleźć wartości własne macierzy M.

(2 p.) Znaleźć wektory własne macierzy M odpowiadające jej wartościom własnym.

(2 p.) Znaleźć wartości własne macierzy M^2, M^4 i M^{2017}.

(1 p.) Znaleźć wartości i wektory własne macierzy M^{-1}.

(2 p.) Niech $F(\mathbf{v})=M\mathbf{v}$. Czy przekształcenie F jest obrotem lub symetrią przestrzeni?

Rozwiązanie. Mamy $M\cdot\mathbf{v}=\begin{pmatrix}5&-1&-4\\-1&1&2\\2&-1&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\0\\3\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$, zatem $\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}=3\cdot\mathbf{v}$ jest wektorem własnym macierzy M odpowiadającym wartości własnej 3. Mamy dalej $\mathbf{w}\cdot M=$ $=\begin{pmatrix}2&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5&-1&-4\\-1&1&2\\2&-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12&-3&-9\end{pmatrix}$ oraz $\mathbf{u}\cdot M=\begin{pmatrix}1&0&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5&-1&-4\\-1&1&2\\2&-1&-1\end{pmatrix}=$ $=\begin{pmatrix}3&0&-3\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1&0&-1\end{pmatrix}$.

Szukamy wartości własnych macierzy M, które są, jak wiadomo, pierwiastkami wielomianu charakterystycznego:

$0=\begin{vmatrix}5-\lambda&-1&-4\\-1&1-\lambda&2\\2&-1&-1-\lambda\end{vmatrix}=(5-\lambda)\begin{vmatrix}1-\lambda&2\\-1&-1-\lambda\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-1&2\\2&-1-\lambda\end{vmatrix}-4\begin{vmatrix}-1&1-\lambda\\2&-1\end{vmatrix}=$
$=(5-\lambda)(\lambda^2-1+2)+\lambda+1-4-4(1-2(1-\lambda))=(5-\lambda)(\lambda^2+1)+\lambda-3-4(2\lambda-1)=$
$=-\lambda^3+5\lambda^2-8\lambda+6=(3-\lambda)(\lambda^2-2\lambda+2)=(3-\lambda)((\lambda-1)^2+1)=(3-\lambda)((\lambda-1)^2-i^2)=$
$=(3-\lambda)(\lambda-1-i)(\lambda-1+i)$, zatem pierwiastkami wielomianu charakterystycznego są liczby 3 (co wiemy już od dawna), $1+i$ oraz $1-i$. Wektory własne odpowiadające wartości własnej 3 mają postać $z\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$, $z\neq 0$, co sprawdziliśmy wcześniej. Jeśli $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ jest wektorem własnym odpowiadającym $1+i$, to zachodzą równości $5x-y-4z=(1+i)x$, $-x+y+2z=(1+i)y$ oraz $2x-y-z=(1+i)z$, czyli $(4-i)x-y-4z=0$, $-x-iy+2z=0$ oraz $2x-y-(2+i)z=0$. Mnożąc drugą z ostatniej trójki przez 2 i dodając wynik do trzeciej otrzymujemy $0=-(1+2i)y+(2-i)z=-i(-i+2)y+(2-i)z=$

$=(2-i)(-iy+z)$, więc $z=iy$. Wtedy $x=-iy+2z=iy$. Wynika stąd , że wektory własne odpowiadające wartości własnej $1+i$ wyglądają tak: $y\begin{pmatrix} i \\ 1 \\ i \end{pmatrix}$, $y \neq 0$. Macierz M jest rzeczywista.

Stąd wynika od razu, że wektor $y\begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}$ odpowiada wartości własnej $1-i=\overline{1+i}$.

Zauważmy. że jeśli $M\cdot\mathbf{v}=\lambda\mathbf{v}$, to $M^2\mathbf{v}=M(\lambda\mathbf{v})=\lambda M\mathbf{v}=\lambda^2\mathbf{v}$, więc λ^2 jest wartością własną M^2 z wektorem własnym $\mathbf{v}$. Analogicznie dowodzimy, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi równość $M^n\mathbf{v}=\lambda^n\mathbf{v}$. Jeśli M ma macierz odwrotną i $M\mathbf{v}=\lambda\mathbf{v}$, to $\mathbf{v}=M^{-1}M\mathbf{v}=\lambda M^{-1}\mathbf{v}$. Wynika stąd w szczególności, że $M\mathbf{v}$ nie jest wektorem zerowym, więc również $\lambda\neq 0$. Pozwala to napisać równość $M^{-1}\mathbf{v}=\lambda^{-1}\mathbf{v}$, więc λ^{-1} jest wartością własną macierzy M^{-1}, a wektorem jej odpowiadającym jest $\mathbf{v}$. Wobec tego jeśli M jest macierzą odwracalną i $M\mathbf{v}=\lambda\mathbf{v}$, $\mathbf{v}\neq\mathbf{0}$, to dla każdej liczby całkowitej n zachodzi równość $M^n\mathbf{v}=\lambda^n\mathbf{v}$. Wartościami macierzy własnymi M^{-1} są liczby $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{1+i}=\frac{1-i}{2}$ oraz $\frac{1}{1-i}=\frac{1+i}{2}$, macierzy M^2 — liczby $3^2=9$, $(1+i)^2=2i$ oraz $(1-i)^2=-2i$, macierzy M^4 — liczby $3^4=81$, $(1+i)^4=(2i)^2=-4$ oraz $(1-i)^4=(-2i)^2=-4$. Mamy też $2017=1+16\cdot 126$, zatem wartościami własnymi macierzy M^{2017} są liczby 3^{2017}, $(1+i)^{2017}=(1+i)\cdot(1+i)^{2016}=(1+i)(-4)^{504}=(1+i)\cdot 2^{1008}$ oraz $(1-i)^{2017}=(1-i)\cdot 2^{1008}$.

Przekształcenie $\mathbf{x}\mapsto M\mathbf{x}$ nie jest izometrią, czyli nie zachowuje odległości, bo $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\mapsto 3\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, odległość punktu $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ od punktu $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ jest równa $\sqrt{5}$, a odległość punktów $M\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ i $M\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ jest 3 razy większa. □

---

5. (2 p.) Niech $M=\begin{pmatrix} 5 & -9 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$. Znaleźć wartości własne macierzy M.

(2 p.) Znaleźć wektory własne macierzy M odpowiadające jej wartościom własnym.

(2 p.) Znaleźć wartości własne macierzy M^{-1}, M^3 i M^{10}.

(2 p.) Niech $F(\mathbf{v})=M\mathbf{v}$. Czy przekształcenie F jest obrotem lub symetrią płaszczyzny?

(2 p.) Znaleźć macierz M^{10}.

Rozwiązanie. Mamy $0=\begin{vmatrix} 5-\lambda & -9 \\ 4 & -7-\lambda \end{vmatrix}=(5-\lambda)(-7-\lambda)+36=1+2\lambda+\lambda^2=(1+\lambda)^2$, zatem jedyną wartością własną tej macierzy jest liczba -1. Jeśli $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ jest wektorem własnym odpowiadającym liczbie -1, to $5x-9y=-x$ i $4x-7y=-y$. Każde z tych równań jest równoważne równaniu $2x=3y$, zatem wektory własne mają postać $\begin{pmatrix} 3x \\ 2x \end{pmatrix}$, $x\neq 0$. Stąd wynika, że $(-1)^n$ jest wartością własną macierzy M^n dla dowolnego całkowitego n. Ponieważ $\begin{vmatrix} 5 & -9 \\ 4 & -7 \end{vmatrix}=1$, więc $\det(M^n)=\big(\det(M)\big)^n=1$. Stąd i z tego, że iloczyn wartości własnych jest równy iloczynowi wartości własnych macierzy, wynika, że „drugą" wartością własną macierzy M^n jest liczba $(-1)^n$.

Mamy też $M^2=\begin{pmatrix} 5 & -9 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix} 5 & -9 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 5 & -9 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -11 & 18 \\ -8 & 13 \end{pmatrix}$, zatem

$M^4=\begin{pmatrix} -11 & 18 \\ -8 & 13 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -11 & 18 \\ -8 & 13 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -23 & 36 \\ -16 & 25 \end{pmatrix}$, a stąd wynika, że

$M^8=\begin{pmatrix} -23 & 36 \\ -16 & 25 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -23 & 36 \\ -16 & 25 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -47 & 72 \\ -32 & 49 \end{pmatrix}$ i wreszcie

$M^{10}=\begin{pmatrix} -11 & 18 \\ -8 & 13 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -47 & 72 \\ -32 & 49 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -59 & 90 \\ -40 & 61 \end{pmatrix}$

Przekształcenie F izometrią nie jest, bo $F\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ i $F\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, więc odległość punktów $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ jest równa 1 więc jest różna od odległości punktów $F\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ i $F\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ równej $\sqrt{5^2+4^2}$. $\square$

Zadanie zostało rozwiązane, ale jeszcze słowo komentarza. Znajdowanie macierzy M^{10} może być uproszczone, jeśli mamy ochotę coś zauważyć. Wiemy już, że

$M=\begin{pmatrix} 5 & -9 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$, $M^2=\begin{pmatrix} -11 & 18 \\ -8 & 13 \end{pmatrix}$, $M^3=\begin{pmatrix} 17 & -27 \\ 12 & -19 \end{pmatrix}$, $M^4=\begin{pmatrix} -23 & 36 \\ -16 & 25 \end{pmatrix}$.

Jeśli zgodzimy się, że czasem warto zaryzykować formułując jakieś przypuszczenie, to w tym wypadku nasuwa się, że być może lewe górne rogi sa wyrazami ciągu arytmetycznego o różnicy 6, w którym jakiś złośliwiec pozamieniał znaki. Podobnie prawe dole rogi. Ale również prawe górne, tylko tym razem w charakterze różnicy pojawia się liczba 9, a dla lewych dolnych różnicą zdaje się być liczba 4. Prowadzi to do przypuszczenia: $M^n=(-1)^{n-1}\begin{pmatrix} 6n-1 & -9n \\ 4n & -(6n+1) \end{pmatrix}$. Nietrudno sprawdzić, że jest tak dla $n=1,2,3,4$. Jeśli jest tak dla pewnej liczby naturalnej n, to $M^{n+1}=$
$=M^n\cdot M=(-1)^{n-1}\begin{pmatrix} 6n-1 & -9n \\ 4n & -(6n+1) \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 5 & -9 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}=(-1)^{n-1}\begin{pmatrix} -6n-5 & 9n+9 \\ -4n-4 & 6n+7 \end{pmatrix}=$
$=(-1)^n\begin{pmatrix} 6(n+1)-1 & -9(n+1) \\ 4(n+1) & -6(n+1)-1 \end{pmatrix}$, a to oznacza, że jeśli hipoteza jest prawdziwa dla pewnej liczby naturalnej n, to jest też prawdziwa dla $n+1$, więc z prawdziwości dla $n=4$ wynika prawdziwość dla $n=5$, potem dla $n=6$ itd. Jest więc prawdziwa dla wszystkich liczb natural-

nych n, a nam wystarcza jej prawdziwość dla $n = 10$. Otrzymujemy

$$M^{10} = (-1)^9 \begin{pmatrix} 60-1 & -90 \\ 40 & -(60+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -59 & 90 \\ -40 & 61) \end{pmatrix}.$$

Można nieco inaczej. Mamy $M = \begin{pmatrix} 5 & -9 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} = -I + N$. Ostatnia równość definiuje macierz N. Mamy $N^2 = \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Oczywiście $(-I)N = N(-I) = -N$. Stąd wynika, że $M^2 = (-I+N)(-I+N) = (-I)^2 - 2N = I - 2N$, $M^3 = (I-2N)(-I+N) = -I + 2N + N = -I + 3N$. Ogólnie $M^n = (-1)^n I + n(-1)^{n-1} N$. Zatem $M^{10} = I - 10N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 10 \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -59 & 90 \\ -40 & 61 \end{pmatrix}$. Jak widać zapis macierzowy w tym wypadku upraszcza nieco przekształcenia. W dodatku otrzymujemy ogólniejszy wynik.
