

Matematyka A — kolokwium dla Anny i Beaty

26 kwietnia 2017 r., godz. 18:05 — 20:00

Rozwiązania różnych zadań należy napisać na różnych kartkach, bo sprawdzą je różne osoby.

Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU imieniem i nazwiskiem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia.

Nie wolno korzystać z urządzeń elektronicznych (kalkulatorów, telefonów komórkowych itp.); posiadane muszą być schowane i wyłączone! Nie dotyczy rozruszników serca.

Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały udowodnione na wykładzie lub na ćwiczeniach.

Należy przeczytać **CAŁE** zadanie **PRZED** rozpoczęciem rozwiązywania go!

1. (5 p.) Znaleźć wszystkie takie liczby zespolone z , że $z^3 + 2z^2 + 10z - 26 = 0$

(5 p.) Obliczyć $(\sqrt{3} + i)^{10}$ oraz $(\frac{\sqrt{3}-i}{2})^{2017}$.

2. (10 p.) Znaleźć wszystkie takie liczby zespolone z , że $|z^4 + 2| + z^2\bar{z}^2 = 2$.

3. (2 p.) Niech O będzie zbiorem złożonym ze wszystkich takich liczb zespolonych z , że $|15 + 8i - z| = 17$. Naszkicować w układzie współrzędnych zbiór O .

(1 p.) Opisać równaniem (zespolonym lub rzeczywistym) i naszkicować zbiór Q złożony ze wszystkich takich liczb zespolonych \bar{z} , że $z \in O$.

(3 p.) Opisać równaniem (zespolonym lub rzeczywistym) i naszkicować zbiór P złożony ze wszystkich takich liczb zespolonych $i\bar{z}$, że $z \in O$.

(4 p.) Znaleźć wszystkie elementy zbioru $O \cap P$.

4. Niech $M = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(1 p.) Obliczyć $M \cdot \mathbf{v}$, $\mathbf{w} \cdot M$ oraz $\mathbf{u} \cdot M$.

(2 p.) Znaleźć wartości własne macierzy M .

(2 p.) Znaleźć wektory własne macierzy M odpowiadające jej wartościom własnym.

(2 p.) Znaleźć wartości własne macierzy M^2 , M^4 i M^{2017} .

(1 p.) Znaleźć wartości i wektory własne macierzy M^{-1} .

(2 p.) Niech $F(\mathbf{x}) = M\mathbf{x}$ dla $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$. Czy przekształcenie F jest obrotem lub symetrią \mathbb{R}^3 ?

5. (2 p.) Niech $M = \begin{pmatrix} 5 & -9 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$. Znaleźć wartości własne macierzy M .

(2 p.) Znaleźć wektory własne macierzy M odpowiadające jej wartościom własnym.

(2 p.) Znaleźć wartości własne macierzy M^{-1} , M^3 i M^{10} .

(2 p.) Niech $F(\mathbf{x}) = M\mathbf{x}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$. Czy przekształcenie F jest obrotem lub symetrią \mathbb{R}^2 ?

(2 p.) Znaleźć macierz M^{10} .
