

Matematyka A — kolokwium
29 marca 2017 r., godz. 18:05 — 20:00

Rozwiązania różnych zadań należy napisać na różnych kartkach, bo sprawdzają je różne osoby. Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU imieniem i nazwiskiem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia.

Nie wolno korzystać z urządzeń elektronicznych (kalkulatorów, telefonów komórkowych itp.); posiadane muszą być schowane i wyłączone! Nie dotyczą rozruszników serca.

Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały udowodnione na wykładzie lub na ćwiczeniach.

Należy przeczytać **CAŁE** zadanie **PRZED** rozpoczęciem rozwiązywania go!

1. (5 p.) Obliczyć granicę $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \sin \frac{3\pi}{n} + \dots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n} + \sin \frac{n\pi}{n} \right)$.

(3 p.) Rozstrzygnąć, która z liczb $\int_0^{\pi/2} e^{\sin x} dx$ i $\int_0^{\pi/2} e^{\cos x} dx$ jest większa.

(2 p.) Rozstrzygnąć, która z liczb $\int_0^{\pi} e^{\sin x} dx$ i $\int_0^{\pi} e^{\cos x} dx$ jest większa.

2. Niech $f(x) = 3x^2$ dla $x \in \mathbb{R}$ i $a < b$. Niech $A = (2a, f(2a))$ i $B = (2b, f(2b))$. Niech S oznacza zbiór złożony z punktów leżących jednocześnie pod prostą AB i nad wykresem funkcji f .

(2 p.) Znaleźć taką liczbę $c \in \mathbb{R}$ (w zależności od a i b), że styczna do wykresu funkcji f w punkcie $C = (c, f(c))$ jest równoległa do prostej AB .

(2 p.) Znaleźć pole zbioru S w zależności od parametrów a i b .

(2 p.) Znaleźć pole trójkąta ABC w zależności od parametrów a i b .

(4 p.) Znaleźć środek ciężkości zbioru S w zależności od parametrów a i b zakładając, że zbiór S jest jednorodny.

3. (10 p.) Niech $f(x) = -\frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} \ln \frac{\sin x}{1 - \cos x}$ dla $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

Obliczyć długość wykresu funkcji f .

4. Niech $A = \{(x, y, z) : y^2 + z^2 \leq \cos^2 x \text{ i } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\}$.

(5 p.) Obliczyć objętość zbioru A .

(5 p.) Znaleźć środek ciężkości zbioru A .

5. (10 p.) Obliczyć całkę $\int \frac{x^4 - 5x^3 - 10x - 56}{x^3 - 4x^2 + 4x - 16} dx$.
