Matematyka A, egzamin, 20 lutego 2017, 13:35 – 16:35

Rozwiązania różnych zadań należy napisać na różnych kartkach, bo sprawdzać je będą różne osoby. Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU nazwiskiem i imieniem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia.

Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; posiadane muszą być schowane i wyłączone! Nie dotyczy rozruszników serca.

Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały *udowodnione* na wykładzie lub na ćwiczeniach.

Należy przeczytać **CAŁE** zadanie **PRZED** rozpoczęciem rozwiązywania go!

---

1. **(3 p.)** Zdefiniować $\log_p q$ pamiętając o założeniach o p i q.

(7 p.) Rozwiązać równanie $\frac{\log_{10}(2x+1)^3}{\log_5 125} + \frac{\log_{10}(3-x)^5}{5} = \frac{\log_{0,1}(x+2)^3}{\log_7(7\cdot 49)} + \log_{0,1}\frac{2x-3}{20}$.

---

2. **(3 p.)** Podać definicję kosinusa, sinusa i tangensa dowolnego kąta dodatniego.

(4 p.) Rozwiązać nierówność $\sin t - \cos t > \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

(3 p.) Zilustrować jej rozwiązanie na okręgu $x^2 + y^2 = 1$.

---

3. **(4 p.)** Niech $x, y > 0$ oznaczają takie liczby rzeczywiste, że $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{144} = 1$. Styczna w punkcie (x, y) do wykresu funkcji $y = 3\sqrt{16 - x^2}$ określonej na przedziale otwartym $(0, 4)$ przecina z osie układu współrzędnych w punktach $P(x)$ i $Q(x)$. Znaleźć współrzędne punktów $P(x)$ i $Q(x)$ w zależności od $x \in (0, 4)$.

(6 p.) Znaleźć liczbę $x \in (0, 4)$, dla której odcinek $P(x)Q(x)$ jest najkrótszy.

---

4. Niech $f(x) = \sqrt[3]{x(x+2)^2(x-2)^4}$. Jeżeli $x^2 \notin \{0,\ 4\}$, to zachodzą równości:

$$f'(x) = \frac{(-4 + 4x + 7x^2)(x-2)^{1/3}}{3x^{2/3}(x+2)^{1/3}} \quad \text{i} \quad f''(x) = \frac{4(-8 - 8x - 22x^2 + 8x^3 + 7x^4)}{9 \cdot (x-2)^{2/3} \cdot x^{5/3} \cdot (x+2)^{4/3}}.$$

Wielomian $-4 + 4x + 7x^2$ ma dwa pierwiastki: $x_1 = \frac{-2-4\sqrt{2}}{7} \approx -1{,}094$, $x_2 = \frac{-2+4\sqrt{2}}{7} \approx 0{,}522$.
Wielomian $-8 - 8x - 22x^2 + 8x^3 + 7x^4$ ma dwa pierwiastki rzeczywiste: $x_3 \approx -2{,}358$ i $x_4 \approx 1,584$, przy czym $f'''(x_3) \neq 0 \neq f'''(x_4)$.

(1 p.) W jakich punktach funkcja f ma pochodną pierwszego rzędu.

(2 p.) Znaleźć te przedziały, na których funkcja f maleje i te, na których rośnie.

(2 p.) Znaleźć te przedziały, na których funkcja f jest wypukła i te, na których jest wklęsła.

(1 p.) Obliczyć granice funkcji f i jej pochodnej f' przy $x \longrightarrow \pm\infty$.

(4 p.) Na podstawie uzyskanych informacji naszkicować wykres funkcji f.

---

5. **(5 p.)** Obliczyć $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\big((1+3x)^{1/3} + (1+3x)^{-1/3} - 2\cos(x^2) + \ln(\cos(x\sqrt{2}))\big) \cdot \ln(1 + (\sin(x))^5)}{\big(\operatorname{tg}(x) - \sin(x)\big) \cdot \cos(x\sqrt{2}) \cdot (\operatorname{tg} x)^5}$.

(5 p.) Obliczyć $\int x^2 e^{-3x} \mathrm{d}x$.

---

6. Niech $A = (0,0,0)$, $B = (6,0,0)$, $D = (0,6,0)$, $A_1 = (0,0,6)$. Punkty C, B_1, C_1, D_1 są pozostałymi wierzchołkami sześcianu $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Punkty E, F, G leżą na odcinkach AD, AB, A_1D_1 oraz $\frac{DE}{EA} = 5$, $\frac{BF}{FA} = 2$, $\frac{A_1G}{GD_1} = 1$.

(2 p.) Znaleźć współrzędne C, B_1, C_1, D_1, E, F, G i iloczyn $\overrightarrow{FE} \times \overrightarrow{FG}$.

(2 p.) Znaleźć równanie płaszczyzny EFG i punkty jej przecięcia z prostymi A_1B_1 i AA_1.

(4 p.) Znaleźć objętość wielościanu $AEFA_1B_1G$.

(2 p.) Znaleźć kosinus kąta $\sphericalangle EFG$. Czy $\sphericalangle EFG < \frac{\pi}{3}$?

Ciekawostki (któż wie, co się może przydać): $(1+x)^a = 1 + ax + \binom{a}{2}x^2 + \binom{a}{3}x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n}x^n$,
$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $\big(\cos x\big)' = -\sin x$, $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$, $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$,
$\operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \ldots$ $\ln(1-x) = -\big(x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \ldots\big)$, $\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.