Matematyka A, egzamin, 30 stycznia 2017, 18:05 – 21:05

Rozwiązania różnych zadań należy napisać na różnych kartkach, bo sprawdzać je będą różne osoby. Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU nazwiskiem i imieniem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia.

Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; posiadane muszą być schowane i wyłączone! Nie dotyczy rozruszników serca.
Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!
Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały *udowodnione* na wykładzie lub na ćwiczeniach.

Należy przeczytać **CAŁE** zadanie **PRZED** rozpoczęciem rozwiązywania go!

---

1. **(3 p.)** Zdefiniować $\log_c a$ pamiętając o założeniach o a i c.
(7 p.) Rozwiązać równanie $\frac{1}{3}\log_{10}(x^3)+\frac{1}{5}\log_{10}(3-x)^5=\frac{\log_7 49+\log_3 2}{\log_3 10}+\log_{0,1}(2x+5)$.

---

2. **(3 p.)** Podać definicję kosinusa, sinusa i tangensa dowolnego kąta dodatniego.
(4 p.) Rozwiązać nierówność $\cos t-\sin t>\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}$.
(3 p.) Zilustrować jej rozwiązanie na okręgu $x^2+y^2=1$.

---

3. **(4 p.)** Niech $p>0$ oznacza liczbę rzeczywistą. Niech $P=(p,\frac{1}{4}p^4)$ i niech $Q=(q,\frac{1}{4}q^4)$ przy czym styczne w punktach P i Q do wykresu funkcji $y=\frac{1}{4}x^4$ są prostopadłe. Wyznaczyć liczbę q w zależności od p.
(6 p.) Znaleźć liczbę $p>0$, dla której odcinek PQ jest najkrótszy lub wykazać, że taka liczba nie istnieje.

---

4. Niech $f(x)=x\cdot\sqrt[7]{\frac{(x^2-1)^9}{(x^2-4)^9}}$. Jeżeli $x^2\notin\{1,\ 4\}$, to zachodzą równości:

$$f'(x)=\frac{28-89x^2+7x^4}{7}\cdot\sqrt[7]{\frac{(x^2-1)^2}{(x^2-4)^{16}}}\quad \text{i}\quad f''(x)=\frac{54x(-84+89x^2+7x^4)}{49\cdot\sqrt[7]{(x^2-1)^5(x^2-4)^{23}}}.$$

Wielomian $28-89x^2+7x^4$ ma cztery pierwiastki: $x_1\approx-3{,}52$, $x_2\approx-0{,}57$, $x_3=-x_2$ oraz $x_4=-x_1$. Pierwiastkami wielomianu $-84+89x^2+7x^4$ są liczby $x_5\approx-0{,}94$ i $x_6=-x_5$.
(1 p.) W jakich punktach funkcja f ma pochodną pierwszego rzędu.
(2 p.) Znaleźć te przedziały, na których funkcja f maleje i te, na których rośnie.
(2 p.) Znaleźć te przedziały, na których funkcja f jest wypukła i te, na których jest wklęsła.
(1 p.) Obliczyć granice funkcji f i jej pochodnej f' przy $x\longrightarrow\pm\infty$.
(4 p.) Na podstawie uzyskanych informacji naszkicować wykres funkcji f.

---

5. **(5 p.)** Obliczyć $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left((1+5x)^{1/5}+(1+5x)^{-1/5}-2\cos(x^2)\right)\cdot\log_{10}(10+x^8)\cdot\ln(1+x^8)}{\ln\left(\cos(x\sqrt{2})\right)\cdot\cos(x\sqrt{2})\cdot(\operatorname{tg}x)^8}$.
(5 p.) Obliczyć $\int x^2\cos(2x)\mathrm{d}x$.

---

6. Niech $A=(3,6,-1)$, $B=(3,2,1)$, $C=(-3,10,-1)$, $D=(5,4,1)$. Punkty E,F,G są środkami odcinków AD, BD i BC.
(1 p.) Znaleźć iloczyn $\overrightarrow{EF}\times\overrightarrow{FG}$.
(3 p.) Znaleźć pole części wspólnej czworościanu $ABCD$ i płaszczyzny EFG.
(2 p.) Znaleźć równanie płaszczyzny EFG i odległość punktu D od niej.
(2 p.) Znaleźć objętość czworościanu $ABCD$.
(2 p.) Znaleźć kosinus kąta $\sphericalangle BAC$. Czy $\sphericalangle BAC<\frac{2\pi}{3}$?

Ciekawostki (któż wie, co się może przydać): $(1+x)^a=1+ax+\binom{a}{2}x^2+\binom{a}{3}x^3+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n}x^n$, $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $\left(\cos x\right)'=-\sin x$, $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1$, $\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\operatorname{tg}x=x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\frac{17}{315}x^7+\ldots$ $\ln(1-x)=-\left(x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{4}x^4+\ldots\right)$, $\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.