Matematyka A, kolokwium, 11 stycznia 2017, 18:10 – 20:05

Rozwiązania różnych zadań należy napisać na różnych kartkach, bo sprawdzać je będą różne osoby. Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU nazwiskiem i imieniem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia.

Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; posiadane muszą być schowane i wyłączone! Nie dotyczy rozruszników serca.

Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały *udowodnione* na wykładzie lub na ćwiczeniach.

Należy przeczytać **CAŁE** zadanie **PRZED** rozpoczęciem rozwiązywania go!

---

1. **(5 p.)** Wykazać, że jeśli $0 < x \leqslant 1$, to $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}$.

(5 p.) Wykazać, że jeśli $-1 < x < 0$, to

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5(1+x)} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}.$$

---

2. Obliczyć granice

(5 p.) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x) - \frac{\sin(x\sqrt{2})}{\sqrt{2}} + 2x - 1 - \ln(1+x)}{x^4}$ oraz **(5 p.)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+2x} - (1 + x - \frac{x^2}{2})}{x - \sin(x)}$.

Wolno korzystać z rezultatów innych zadań.

---

3. **(5 p.)** Wykazać, że jeśli $1\,000\,000 > y > x > 1000$, to $\frac{y-x}{30000} < \sqrt[3]{y} - \sqrt[3]{x} < \frac{y-x}{300}$.

(5 p.) Wykazać, że jeśli $x > 10$, to $\log_{10} x < 1 + \frac{x-10}{10\ln 10}$ i $10^x > 10^{10} + 10^{10}\ln 10(x-10)$.

---

4. Niech $f(x) = e^{-x}(x-3)\sqrt[3]{(x^2-1)^2(x-2)}$. Dla $x \neq 2, \pm 1$ zachodzą równości

$f'(x) = \frac{1}{3}e^{-x}(27 + 5x - 44x^2 + 23x^3 - 3x^4)(x-2)^{-2/3}(x^2-1)^{-1/3}$ oraz

$f''(x) = -\frac{1}{9}e^{-x}(78 + 374x - 913x^2 + 207x^3 + 572x^4 - 436x^5 + 111x^6 - 9x^7)\sqrt[3]{(x-2)^{-5}(x^2-1)^{-4}}$.

Wielomian $27 + 5x - 44x^2 + 23x^3 - 3x^4$ ma cztery pierwiastki: $x_1 \approx -0{,}63$, $x_2 \approx 1{,}36$, $x_3 \approx 2{,}22$, $x_4 \approx 4{,}72$. Wielomian $78 + 374x - 913x^2 + 207x^3 + 572x^4 - 436x^5 + 111x^6 - 9x^7$ ma pięć pierwiastków rzeczywistych: $x_5 \approx -1{,}09$, $x_6 \approx -0{,}15$, $x_7 \approx 0{,}89$, $x_8 \approx 2{,}83$ oraz $x_9 \approx 6{,}22$. Pochodna tego wielomianu siódmego stopnia jest różna od 0 w każdym z pięciu punktów x_5, x_6, x_7, x_8, x_9.

(1 p.) Podać definicję pochodnej funkcji f w punkcie p i wyjaśnić, w jakich punktach funkcja f ma pochodną pierwszego rzędu, niekoniecznie skończoną.

(2 p.) Znaleźć te przedziały, na których funkcja f maleje oraz te, na których rośnie.

(2 p.) Znaleźć te przedziały, na których funkcja f jest wypukła i te, na których jest wklęsła.

(1 p.) Obliczyć granice funkcji f i jej pochodnej f' przy $x \longrightarrow \pm\infty$.

(4 p.) Na podstawie uzyskanych informacji naszkicować wykres funkcji f.

---

5. **(8 p.)** Na wykresie funkcji $y = \frac{1}{2}x^2$ znaleźć punkt B, którego odległość od punktu $A = (-24, 15)$ jest najmniejsza

(2 p.) Znaleźć kosinus kąta między prostą AB i prostą styczną w punkcie B do wykresu funkcji $y = \frac{1}{2}x^2$.

Ciekawostki (któż wie, co i kiedy się może przydać): Dla każdej liczby rzeczywistej $x > 0$ zachodzą nierówności $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$ oraz $1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} < \cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$.