Matematyka A, kolokwium, 7 grudnia 2016, 18:10 – 20:05

Rozwiązania różnych zadań należy napisać na różnych kartkach, bo sprawdzać je będą różne osoby. Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU nazwiskiem i imieniem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia.

Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; posiadane muszą być schowane i wyłączone! Nie dotyczy rozruszników serca.

Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały *udowodnione* na wykładzie lub na ćwiczeniach.

Należy przeczytać **CAŁE** zadanie **PRZED** rozpoczęciem rozwiązywania go!

---

1. Obliczyć granice

(2 p.) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{7n^2+12n\sin n+2016\sqrt{n+3}}{7\cos n+12n\sqrt{n}+1970n^2}$ oraz

(8 p.) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n^n]{n!\cdot n^n}$.

---

2. Niech a_n oznacza sumę odwrotności kolejnych liczb nieparzystych od $2n+1$ do $4n-1$ dla każdej dodatniej liczby całkowitej n: $a_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+3} + \ldots + \frac{1}{4n-1}$.

(3 p.) Dowieść, że $a_n < a_{n+1}$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

(3 p.) Dowieść, że $\frac{1}{3} \leqslant a_n < \frac{1}{2}$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

(4 p.) Dowieść, że ciąg (a_n) ma granicę i że $\frac{1}{3} < \lim\limits_{n\to\infty} a_n < \frac{1}{2}$.

---

3. Rozstrzygnąć, czy istnieje taka liczba naturalna k, że dla każdego $n > k$ zachodzi nierówność i jeśli istnieje, wskazać jakąś, niekoniecznie najmniejszą:

(5 p.) $n^2 \cdot 3{,}14^n < \pi^n$,

(5 p.) $\sin\sqrt{n+4} - \sin\sqrt{n+2} < \sqrt{n+2} - \sqrt{n}$.

---

4. **(3 p.)** Korzystając z definicji pochodnej obliczyć $f'(0)$, jeśli

$$f(x) = \ln(1+\mathrm{tg}(\sin x))\left(\cos x + \ln\left(e^{\sqrt{1+x}+x^2}\right) + \log_{10}(1+\mathrm{tg}^4(\tfrac{\pi}{3}+x))\right).$$

(4 p.) Obliczyć pochodne funkcji $\left(\frac{2x}{x^2+4}\right)^{\cos(5x)}$ i $\frac{\sin(x^2)}{2+\cos^2(5x^3)}$.

(3 p.) Znaleźć wszystkie takie liczby $a \in \mathbb{R}$, że jeśli $f(x) = e^{ax}$, to dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi równość $(f'(x))' - 6f'(x) + 5f(x) = 0$.

---

5. **(10 p.)** Znaleźć najkrótszy z odcinków przechodzących przez punkt $(27,8)$, których końce leżą na półosiach układu współrzędnych złożonych z punktów o obu współrzędnych nieujemnych.

Ciekawostki (któż wie, co i kiedy się może przydać):

2 grudnia 1789 – czarna procesja, **7 grudnia 1970 w Warszawie** – Willy Brandt i Józef Cyrankiewicz podpisali w obecności Władysława Gomułki trakt, w którym RFN po raz pierwszy uznała polską granicę zachodnią.

$\mathbb{N}$ oznacza zbiór dodatnich liczb całkowitych: $\mathbb{N} = \{1,2,3,\ldots\}$, $x > 0 \implies x - x^3 < \sin x < x$, $3^3 = 27$, $3^6 = 729$, $3^9 = 19683$, $3^{12} = 531441$, $11^2 = 121$, $11^3 = 1331$, $11^4 = 14641$, $11^5 = 161051$, $7^2 = 49$, $7^4 = 2401$, $7^6 = 117649$, $51^2 = 2601$, $52^2 = 2704$, $\pi \approx 3{,}14159$, $64^2 = 4096$, $65^2 = 4225$, $66^2 = 4356$, $67^2 = 4489$, $666^2 = 443556$, $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $\cos\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}$, $\sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $a^2-b^2 = (a-b)(a+b)$.