Matematyka A, kolokwium, 2 listopada 2016, 18:10 – 20:00

Rozwiązania różnych zadań należy napisać na różnych kartkach, bo sprawdzać je będą różne osoby. Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU nazwiskiem i imieniem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia.

Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; posiadane muszą być schowane i wyłączone! Nie dotyczy rozruszników serca.

Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały *udowodnione* na wykładzie lub na ćwiczeniach.

Należy przeczytać **CAŁE** zadanie **PRZED** rozpoczęciem rozwiązywania go!

---

1. Punkty $A, B, C, D, A_1, B_1, C_1, D_1$ są wierzchołkami równoległościanu, przy czym $A = (0, 0, 0)$, $A_1 = (1, 1, 3)$, $B = (2, 2, 4)$, $D = (2, 3, 5)$ $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$, $AB \parallel DC \parallel D_1C_1 \parallel A_1B_1$ oraz $AD \parallel BC \parallel B_1C_1 \parallel A_1D_1$.

(1 p.) Niech E będzie środkiem odcinka A_1B_1 a F — odcinka D_1C_1. Znaleźć współrzędne punktów C, B_1, C_1, D_1, E, F.

(1 p.) Obliczyć długości odcinków AB i BE.

(2 p.) Obliczyć $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}$ i pole równoległoboku $ABCD$.

(1 p.) Obliczyć odległość punktu C od prostej AB.

(2 p.) Znaleźć równanie płaszczyzny zawierającej punkty A_1, B_1, C_1.

(3 p.) Znaleźć objętość wielościanu o wierzchołkach A, B, C, D, E, B_1, C_1, F.

---

2. Niech $A = (3, 1, 2)$, $B = (7, 5, 9)$, $C = (0, -5, 8)$, $D = (6, 7, -4)$.

(3 p.) Podać definicję kosinusa dowolnego kąta $\varphi > 0$.

(2 p.) Obliczyć kosinusy kątów α między wektorami $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$ oraz β między wektorami $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AD}$.

(2 p.) Który z kątów α, β jest większy? Czy $\alpha > \frac{\pi}{3}$? Czy $\alpha > \frac{\pi}{2}$? Czy $\beta > \frac{2\pi}{3}$?

(3 p.) Znaleźć zbiór A złożony z tych wszystkich $t \in \mathbb{R}$, dla których zachodzi nierówność $\cos(t + \frac{\pi}{2}) < -\frac{1}{2}$ i zaznaczyć na okręgu o równaniu $x^2 + y^2 = 1$ zbiór złożony ze wszystkich punktów postaci $(\cos t, \sin t)$, $t \in A$.

---

3. **(4 p.)** Podać definicję granicy ciągu (a_n).

(6 p.) Obliczyć $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2016n^{11} + 2}{1805n^{12} + 2}$ i uzasadnić wynik w oparciu o definicję lub twierdzenia z wykładu.

---

4. **(5 p.)** Dowieść, że

$$\log_{10}(350 - 7) + \log_{10} \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{5} \log_{10} 1024 + \tfrac{4}{3} \log_{10} 27 < 14 \log_{10} 2 < 2 + 2 \log_{10} 13.$$

(3 p.) Która liczba jest większa $\frac{\log_{10} 256}{\log_{10} 16} + \log_2 \sqrt{2}$ czy $\log_3 27 + \log_{49} \frac{1}{7} + \log_{10} 1{,}001$?

(2 p.) Wykazać, że liczba $\log_{10} 123456789$ nie jest całkowita.

---

5. **(10 p.)** Rozwiązać układ równań $\begin{cases} x^4 + y^2 = 41, \\ 4 \log_{10} x + \log_{10}(y^2) = 2 + \log_{10} 4. \end{cases}$
