Matematyka A — egzamin poprawkowy
1 września 2016 r., godz. 14:10 — 17:25

Rozwiązania różnych zadań należy napisać na różnych kartkach, bo sprawdzą je różne osoby. Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU imieniem i nazwiskiem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia.
Nie wolno korzystać z urządzeń elektronicznych (kalkulatorów, telefonów komórkowych itp.); posiadane muszą być schowane i wyłączone! Nie dotyczy rozruszników serca.
Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!
Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały *udowodnione* na wykładzie lub na ćwiczeniach.

Należy przeczytać **CAŁE** zadanie **PRZED** rozpoczęciem rozwiązywania go!

---

1. **(10 p.)** W pokoju hotelowym znaleziono zwłoki starszego, brodatego mężczyzny, których temperatura była równa 30,6° C. W klimatyzowanym pokoju panowała stała temperatura 18,6° C. Po dwóch godzinach temperatura zwłok spadła do 24,6° C. Ile godzin upłynęło od momentu śmierci do momentu pierwszego pomiaru temperatury zwłok, jeśli w chwili śmierci temperatura mężczyzny była równa 36,6° C (był wtedy zdrowy), a temperatura zwłok malała zgodnie z Newtona prawem stygnięcia: szybkość zmian temperatury jest proporcjonalna do różnicy temperatur obiektu i otoczenia, $\log 3 \approx 0{,}4771$, $\log 2 \approx 0{,}3010$.

---

2. **(6 p.)** Rozwiązać układ równań różniczkowych:

$$(\clubsuit)\qquad \begin{cases} x'(t) = 4x(t) - 4y(t), \\ y'(t) = 9x(t) - 8y(t). \end{cases}$$

(4 p.) Znaleźć rozwiązanie układu $(\clubsuit)$ spełniające warunki $x(0) = 1 = y(0)$.

---

3. **(6 p.)** Znaleźć wszystkie takie liczby zespolone z, że $z^{19} + 8z^{16} + z^{11} + 8z^8 + z^3 + 8 = 0$.
(4 p.) Znalezione liczby zespolone zaznaczyć na płaszczyźnie.

---

4. Niech E będzie obszarem ograniczonym wykresami funkcji $y = \sin\frac{\pi x}{2}$ i $y = x\sin\frac{\pi x}{2}$ oraz prostymi $x = 0$ i $x = 1$. Zbiór E jest jednorodny.
(3 p.) Naszkicować zbiór E.
(2 p.) Znaleźć pole zbioru E.
(5 p.) Znaleźć obie współrzędne środka ciężkości zbioru E.

---

5. Niech $f(x,y) = (x^2 + y^2 - 25)(x^2 - y - 5)$ dla $x, y \in \mathbb{R}$. Zachodzą wtedy równości:
$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x(x^2 - y - 5) + 2x(x^2 + y^2 - 25)$ oraz
$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y(x^2 - y - 5) - (x^2 + y^2 - 25)$.
(4 p.) Znaleźć wszystkie punkty, w których gradient funkcji f jest wektorem zerowym.
(4 p.) Znaleźć lokalne ekstrema funkcji f.
(2 p.) W zbiorze $D = \{(x,y)\colon \quad x^2 + y^2 - 25 \leqslant 0 \text{ i } x \geqslant 0\}$ znaleźć punkty, w których funkcja $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ przyjmuje najmniejszą i największą wartość lub wykazać, że funkcja $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ którejś z nich lub obu nie ma.

---

6. **(10 p.)** Rozwiązać równanie

$$x''(t) - 4x'(t) + 13x(t) = 9te^{2t} + 6e^{2t}\cos(3t) + 40\sin(3t) + 13t^3 - 12t^2 + 6t.$$
