

Matematyka A — egzamin

20 czerwca 2016 r., godz. 9:10 — 12:25

Rozwiązania różnych zadań należy napisać na różnych kartkach, bo sprawdzą je różne osoby. Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU imieniem i nazwiskiem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia.

Nie wolno korzystać z urządzeń elektronicznych (kalkulatorów, telefonów komórkowych itp.); posiadane muszą być schowane i wyłączone! Nie dotyczy rozruszników serca.

Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i **NALEŻY** powoływać się na twierdzenia, które zostały *udowodnione* na wykładzie lub na ćwiczeniach.

Należy przeczytać **CAŁE** zadanie **PRZED** rozpoczęciem rozwiązywania go!

1. (10 p.) Znaleźć wszystkie takie funkcje f , że a styczna do wykresu f w dowolnym jego punkcie przechodzi przez punkt $(2006, 2016)$.
-

2. (6 p.) Rozwiązać układ równań różniczkowych:

$$(\clubsuit) \quad \begin{cases} x'(t) = 102x(t) - 101y(t), \\ y'(t) = 101x(t) - 100y(t). \end{cases}$$

- (4 p.) Znaleźć rozwiązanie układu (\clubsuit) spełniające warunki $x(0) = 1$ oraz $y(0) = 0$.
-

3. (6 p.) Znaleźć wszystkie takie liczby zespolone z , że $z^{14} + 64z^8 - 81z^6 - 2^6 \cdot 3^4 = 0$.

- (4 p.) Znalezione liczby zespolone zaznaczyć na płaszczyźnie.
-

4. Niech $E = \{(x, y) : 12x + y - 4x^2 \geq 0 \geq 48x + 4y - y^2 \text{ i } 0 \geq y\}$ dla $x, y \in \mathbb{R}$.

- (3 p.) Naszkiecować zbiór E .

- (3 p.) Znaleźć pole zbioru E .

- (4 p.) Znaleźć drugą współrzędną środka ciężkości zbioru E zakładając, że jest on jednorodny.
-

5. Niech $f(x, y) = (12x + y - 4x^2)(48x + 4y - y^2)$ dla $x, y \in \mathbb{R}$. Zachodzą wtedy równości:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = (12 - 8x)(48x + 4y - y^2) + 48(12x + y - 4x^2) \text{ oraz}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = (48x + 4y - y^2) + (4 - 2y)(12x + y - 4x^2).$$

- (4 p.) Znaleźć wszystkie punkty, w których gradient funkcji f jest wektorem zerowym.

- (4 p.) Znaleźć lokalne ekstrema funkcji f .

- (2 p.) W zbiorze $D = \{(x, y) : 12x + y - 4x^2 \geq 0\}$ znaleźć punkty, w których funkcja $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ przyjmuje najmniejszą i największą wartość lub wykazać, że funkcja $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ któreś z nich lub obu nie ma.
-

6. (10 p.) Rozwiązać równanie $x''(t) - 4x'(t) + 8x(t) = 4e^{2t} + 96t^2 e^{2t} \cos(2t) - 20 \cos(2t) + 8t^3$.
-