**Matematyka A, egzamin, 24 lutego 2016, 10:05 – 13:05**

*Rozwiązania różnych zadań mają znaleźć się na różnych kartkach, bo sprawdzać je będą różne osoby. Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU nazwiskiem i imieniem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia.*

**Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; posiadane muszą być schowane i wyłączone!** Nie dotyczy rozruszników serca.

*Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!*

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały *udowodnione* na wykładzie lub na ćwiczeniach.

---

Należy przeczytać **CAŁE** zadanie **PRZED** rozpoczęciem rozwiązywania go!

---

**1.** **(3 p.)** Zdefiniować $\log_z x$ pamiętając o założeniach o $x$ i $z$.
**(7 p.)** Rozwiązać równanie $\log_{10}(x+3)+\frac{\log_{10}(1-x)^2}{2}=\frac{\log_{10}16}{2}+\log_{10}\left(\frac{\log_7 8}{\log_7 2}\right)-3\log_{10}\sqrt[3]{2-x}$.

---

**2.** **(3 p.)** Podać definicję kosinusa, sinusa i tangensa dowolnego kąta dodatniego.
**4 p.** Rozwiązać nierówność $\operatorname{tg}^2 t-(1+\sqrt{3})\operatorname{tg} t+\sqrt{3}>0$.
**3 p.** Zilustrować jej rozwiązanie na okręgu $x^2+y^2=1$.

---

**3.** **(4 p.)** Niech $p>0$ oznacza liczbę rzeczywistą. Niech $P=(p,\frac12 p^2)$ i niech $Q=(q,\frac12 q^2)$ przy czym styczne do paraboli $y=\frac12 x^2$ w punktach $P$ i $Q$ są prostopadłe. Wyznaczyć liczbę $q$ w zależności od $p$ i znaleźć punkt wspólny tych stycznych.
**(6 p.)** $R$ jest punktem wspólnym stycznych w punktach $P$ i $Q$. Znaleźć liczbę $p>0$, dla której pole trójkąta $PQR$ jest najmniejsze lub dowieść, że taka liczba nie istnieje,

---

**4.** Niech $f(x)=\sqrt[3]{(x+2)^2(x-1)}\,e^x$. Dla $x\in\mathbb{R}\setminus\{-2\,,\,1\}$ zachodzą równości: $f'(x)=e^x\frac{x^2+2x-2}{\sqrt[3]{(x+2)(x-1)^2}}$ i $f''(x)=e^x\cdot\frac{x^4+4x^3-x^2-8x+2}{\sqrt[3]{(x+2)^4(x-1)^5}}$. Wielomian $x^2+2x-2$ ma dwa pierwiastki: $x_1=-1-\sqrt{3}\approx-2{,}73$, $x_2=-1+\sqrt{3}\approx0{,}73$. Wielomian $x^4+4x^3-x^2-8x+2$ ma cztery pierwiastki: $x_3\approx-3{,}63$, $x_4\approx-1{,}83$, $x_5\approx0{,}25$ oraz $x_6\approx1{,}20$.
**(1 p.)** Zdefiniować pochodną funkcji $f$ w punkcie $p$ i wyjaśnić, w jakich punktach funkcja $f$ ma pochodną pierwszego rzędu, niekoniecznie skończoną.
**(2 p.)** Znaleźć przedziały, na których funkcja $f$ maleje, na których rośnie.
**(2 p.)** Znaleźć przedziały, na których funkcja $f$ jest wypukła, na których jest wklęsła.
**(1 p.)** Obliczyć granice funkcji $f$ i jej pochodnej $f'$ przy $x\longrightarrow\pm\infty$.
**(4 p.)** Na podstawie uzyskanych informacji naszkicować wykres funkcji $f$.

---

**5.** **(10 p.)** Obliczyć $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^{1/x}\big((1-5x)^{1/5}-(1-3x)^{1/3}+\operatorname{tg}^2 x\big)\ln(1-x^2)}{\cos^{966}x\cdot(\operatorname{tg}(6x)-\sin(6x)\cdot\big(\cos x-\cos(2x)\big)}$ .

---

**6.** Niech $A=(0,0,0)$, $B=(3,0,0)$, $C=(0,3,3)$, $D=(-3,3,6)$. Punkty $K$, $L$, $M$ i $N$ leżą na odcinkach $BC$, $CA$, $AD$ i $BD$ i $\frac{\|B-K\|}{\|K-C\|}=2$, $\frac{\|A-L\|}{\|L-C\|}=2$, $\frac{\|A-M\|}{\|M-D\|}=2$ i $\frac{\|B-N\|}{\|N-D\|}=2$.
**(2 p.)** Znaleźć współrzędne punktów $K$, $L$, $M$ i $N$.
**(2 p.)** Dowieść, że punkty $K$, $L$, $M$ i $N$ leżą na jednej płaszczyźnie i napisać jej równanie.
**(2 p.)** Znaleźć objętość czworościanu $ABCD$ i pole trójkąta $ABC$.
**(4 p.)** Znaleźć objętość wielościanu $ABKLMN$.

---

*Ciekawostki (któż wie, co się może przydać):* $(1+x)^a=1+ax+\binom{a}{2}x^2+\binom{a}{3}x^3+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n}x^n$,
$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $\big(\cos x\big)'=-\sin x$, $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1$, $\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt2}$,
$\operatorname{tg}x=x+\frac13x^3+\frac{2}{15}x^5+\frac{17}{315}x^7+\ldots$ $\ln(1-x)=-\big(x+\frac12x^2+\frac13x^3+\frac14x^4+\ldots\big)$, $\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt3}$, $\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt3}{2}$.