Matematyka A, egzamin, 9 lutego 2016, 14:05 – 17:05

Rozwiązania różnych zadań mają znaleźć się na różnych kartkach, bo sprawdzać je będą różne osoby. Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU nazwiskiem i imieniem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia.

Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; posiadane muszą być schowane i wyłączone! Nie dotyczy rozruszników serca.

Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały *udowodnione* na wykładzie lub na ćwiczeniach.

Należy przeczytać **CAŁE** zadanie **PRZED** rozpoczęciem rozwiązywania go!

---

1. **(3 p.)** Zdefiniować $\log_d c$ pamiętając o założeniach o c i d.

(7 p.) Rozwiązać równanie $\log_{10}(4x+7) + \frac{1}{3}\log_{10}(2x+1)^3 = \frac{\log_{10} 100}{\log_3 10} - 5\log_{10}\sqrt[5]{1-x}$.

---

2. **(3 p.)** Podać definicję kosinusa, sinusa i tangensa dowolnego kąta dodatniego.

4 p. Rozwiązać nierówność $\sqrt{3}\,\mathrm{tg}^2\, t + 2\,\mathrm{tg}\, t - \sqrt{3} < 0$.

3 p. Zilustrować jej rozwiązanie na okręgu $x^2 + y^2 = 1$.

---

3. **(4 p.)** Niech $p > 0$ oznacza liczbę rzeczywistą. Niech $P = (p, 2p^2)$ i niech $Q = (q, 2q^2)$ przy czym prosta PQ jest prostopadła do stycznej w punkcie P do paraboli o równaniu $y = 2x^2$. Wyznaczyć liczbę q w zależności od p.

(6 p.) Znaleźć liczbę $p > 0$, dla której odcinek PQ jest najkrótszy lub wykazać, że taka liczba nie istnieje.

---

4. Niech $f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2(x-4)}\, e^{-x}$. Dla $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\,,\,4\}$ zachodzą równości:
$f'(x) = -e^{-x}\frac{x^2-6x+7}{\sqrt[3]{(x-1)(x-4)^2}}$ i $f''(x) = e^{-x}\frac{x^4-12x^3+49x^2-78x+38}{\sqrt[3]{(x-1)^4(x-4)^5}}$.

Wielomian $x^2 - 6x + 7$ ma dwa pierwiastki: $x_1 = 3 - \sqrt{2} \approx 1{,}59$, $x_2 = 3 + \sqrt{2} \approx 4{,}41$.

Pierwiastkami wielomianu $x^4 - 12x^3 + 49x^2 - 78x + 38$ są liczby $x_3 = 3 - \sqrt{\frac{5+\sqrt{17}}{2}} \approx 0{,}86$, $x_4 = 3 - \sqrt{\frac{5-\sqrt{17}}{2}} \approx 2{,}34$, $x_5 = 3 + \sqrt{\frac{5-\sqrt{17}}{2}} \approx 3{,}66$ oraz $x_6 = 3 + \sqrt{\frac{5+\sqrt{17}}{2}} \approx 5{,}14$.

(1 p.) Podać definicję pochodnej funkcji f w punkcie p i wyjaśnić, w jakich punktach funkcja f ma pochodną pierwszego rzędu, niekoniecznie skończoną.

(2 p.) Znaleźć przedziały, na których funkcja f maleje, na których rośnie.

(2 p.) Znaleźć przedziały, na których funkcja f jest wypukła, na których jest wklęsła.

(1 p.) Obliczyć granice funkcji f i jej pochodnej f' przy $x \longrightarrow \pm\infty$.

(4 p.) Na podstawie uzyskanych informacji naszkicować wykres funkcji f.

---

5. **(10 p.)** Obliczyć $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\big((1+6x)^{1/6} - (1+4x)^{1/4} + \sin x \cdot \ln(1+x)\big)\ln(\cos(x^8))}{\ln\big(\cos(x\sqrt{2})\big)\cdot \cos(x\sqrt{2})\cdot \mathrm{tg}^{17}\, x}$

---

6. **(5 p.)** Niech $A = (0,0,0)$, $B = (-2,1,8)$, $D = (4,1,-4)$, $C_1 = (6,5,2)$, równoległoboki ABB_1A_1, $ABCD$, ADD_1A_1 są ścianami równoległościanu $ABCDA_1B_1C_1D_1$, odcinki AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 są równoległymi krawędziami tego równoległościanu.

(2 p.) Znaleźć współrzędne punktów B_1, D_1, A_1 i C.

(2 p.) Znaleźć pole trójkąta AB_1C.

(2 p.) Znaleźć objętość czworościanu AB_1CD_1 .

(2 p.) Znaleźć odległość punktu D_1 od płaszczyzny AB_1C.

(2 p.) Znaleźć kosinus i sinus kąta $\sphericalangle B_1AC$.

Ciekawostki (któż wie, co się może przydać): $(1+x)^a = 1 + ax + \binom{a}{2}x^2 + \binom{a}{3}x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n}x^n$, $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $\big(\cos x\big)' = -\sin x$, $\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{4} = 1$, $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\mathrm{tg}\, x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \ldots$ $\ln(1-x) = -\big(x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \ldots\big)$, $\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.