Matematyka A, kolokwium, 13 stycznia 2015, 18:10 – 20:05

Rozwiązania różnych zadań mają znaleźć się na różnych kartkach, bo sprawdzać je będą różne osoby. Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU nazwiskiem i imieniem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia.

Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; posiadane muszą być schowane i wyłączone! Nie dotyczy rozruszników serca.

Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały *udowodnione* na wykładzie lub na ćwiczeniach.

Należy przeczytać **CAŁE** zadanie **PRZED** rozpoczęciem rozwiązywania go!

---

1. **(6 p.)** Wykazać, że jeśli $0 < x < \frac{\pi}{2}$, to $\operatorname{tg} x > x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5$.

(4 p.) Wykazać, że jeśli $0 < x < \frac{\pi}{2}$, to $\operatorname{ctg} x > \frac{\pi}{2} - x$.

---

2. Obliczyć granice

(5 p.) $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt[3]{x} \cdot \ln x$ oraz

(5 p.) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln(\sqrt[3]{1+x^9}+17)}{\sqrt[13]{7+x}}$

---

3. **(5 p.)** Wykazać, że jeśli $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$, to $\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha > \beta - \alpha > \sin\beta - \sin\alpha$.

(5 p.) Wykazać, że jeśli $s < t$, to $(t-s)\cdot 2^t \cdot \ln 2 > 2^t - 2^s > (t-s)\cdot 2^s \cdot \ln 2$.

---

4. Niech $f(x) = \sqrt[3]{x(x^2-1)^5(x+2)^2}$. Dla $x \neq 0, 2, \pm 1$ zachodzą równości

$f'(x) = \frac{1}{3}(13x^3 + 22x^2 - 3x - 2) \cdot \sqrt[3]{\frac{(x^2-1)^2}{x^2(x+2)}}$ i $f''(x) = \frac{2\cdot(65x^6+220x^5+131x^4-140x^3-92x^2-4)}{9\cdot\sqrt[3]{x^5(x+2)^4(x^2-1)}}$.

Wielomian $13x^3+22x^2-3x-2$ ma trzy pierwiastki: $x_1 \approx -1{,}77$, $x_2 \approx -0{,}26$, $x_3 \approx 0{,}34$. Wielomian $65x^6 + 220x^5 + 131x^4 - 140x^3 - 92x^2 - 4$ ma cztery pierwiastki rzeczywiste $x_4 \approx -2{,}07$, $x_5 \approx -1{,}47$, $x_6 \approx -0{,}68$ i $x_7 \approx 0{,}78$. Istnieją takie liczby rzeczywiste p i q, że $p^2 - 4q < 0$ oraz $65x^6 + 220x^5 + 131x^4 - 140x^3 - 92x^2 - 4 =$
$= 65(x-x_4)(x-x_5)(x-x_6)(x-x_7)(x^2+px+q)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

(1 p.) Podać definicję pochodnej funkcji f w punkcie p i wyjaśnić, w jakich punktach funkcja f ma pochodną pierwszego rzędu, niekoniecznie skończoną.

(2 p.) Znaleźć przedziały, na których funkcja f maleje, na których rośnie.

(2 p.) Znaleźć przedziały, na których funkcja f jest wypukła, na których jest wklęsła.

(1 p.) Obliczyć granice funkcji f i jej pochodnej f' przy $x \longrightarrow \pm\infty$.

(4 p.) Na podstawie uzyskanych informacji naszkicować wykres funkcji f.

---

5. **(5 p.)** Dla każdej liczby $s > 0$ znaleźć taką liczbę $t_s \in \mathbb{R}$, że styczne do wykresu funkcji x^2 w punktach (s, s^2) i (t_s, t_s^2) są prostopadłe.

(5 p.) Jaka jest najmniejsza odległość punktów (s, s^2) i (t_s, t_s^2) dla $s > 0$, gdzie t_s jest liczbą opisaną w poprzedniej części tego zadania?
