Matematyka A, kolokwium, 13 stycznia 2015, rozwiązania

Dopisałem dodatkowe rozwiązania, w zadaniach 1 i 5 autorstwa mgr Michała Strzeleckiego

1. (6 p.) Wykazać, że jeśli $0 < x < \frac{\pi}{2}$, to $\operatorname{tg} x > x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5$.

(4 p.) Wykazać, że jeśli $0 < x < \frac{\pi}{2}$, to $\operatorname{ctg} x > \frac{\pi}{2} - x$.

Rozwiązanie. Niech $f(x) = \operatorname{tg} x - (x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15})$.
Mamy $f(0) = 0$ oraz $f'(x) = 1 + \operatorname{tg}^2 x - (1 + x^2 + \frac{2x^4}{3}) = \operatorname{tg}^2 x - (x^2 + \frac{2x^4}{3})$, zatem $f'(0) = 0$ i $f''(x) = 2\operatorname{tg} x(1 + \operatorname{tg}^2 x) - (2x + \frac{8x^3}{3}) = 2\operatorname{tg} x + 2\operatorname{tg}^3 x - (2x + \frac{8x^3}{3})$, więc $f''(0) = 0$ oraz $f'''(x) = (2 + 6\operatorname{tg}^2 x)(1 + \operatorname{tg}^2 x) - (2 + 8x^2) = 8\operatorname{tg}^2 x + 6\operatorname{tg}^4 x - 8x^2 \geqslant 0$ dla $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, bo $\operatorname{tg} x > x$ dla $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Wobec tego funkcja f'' jest ściśle rosnąca na przedziale $[0, \frac{\pi}{2})$ i wobec tego jeśli $x > 0$, to $f''(x) > f''(0) = 0$. Wynika stąd, że funkcja f' jest ściśle rosnąca na przedziale $[0, \frac{\pi}{2})$ i wobec tego jeśli $x > 0$, to $f''(x) > f''(0) = 0$. Powtarzamy argument w odniesieniu do funkcji f': jest ona ściśle rosnąca na przedziale $[0, \frac{\pi}{2})$, bo ma dodatnią pochodną, zatem jeśli $x > 0$, to $f'(x) > f'(0) = 0$. Stąd wynika, że funkcja f jest ściśle rosnąca na przedziale $[0, \frac{\pi}{2})$, więc jeśli $x > 0$, to $f(x) > f(0) = 0$, czyli $\operatorname{tg} x - (x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15}) > 0$, a to chcieliśmy udowodnić.
Niech $g(x) = \operatorname{ctg} x - \left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. Mamy $g(\frac{\pi}{2}) = 0$ oraz $g'(x) = \frac{-1}{\sin^2 x} + 1 < 0$ dla $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Wobec tego funkcja g jest ściśle malejąca na przedziale $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$, więc z nierówności $0 < x < \frac{\pi}{2}$ wynika, że $\operatorname{ctg} x - \left(\frac{\pi}{2} - x\right) = g(x) > g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, co kończy dowód czteropunktowej nierówności. □

Wariacja na temat rozwiązania pierwszej części zadania 1. Ten dopisek pochodzi od mgr Michała Strzeleckiego, któremu zań dziękuję (oczywiście troszkę pozmieniałem) Będziemy postępować podobnie jak wyżej, ale:

- powołamy się na rachunki zrobione przy wyprowadzaniu rozwinięcia Taylora funkcji tangens (i nie będziemy ich powtarzać,
- nie będą nas interesować dokładne postaci pochodnych rozważanych funkcji,
- zróżniczkujemy aż sześć razy.

Oznaczamy $f(x) = \operatorname{tg}(x) - (x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15})$. Funkcja $x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15}$ to piąty wielomian Taylora funkcji tangens, więc $f'(0) = f''(0) = f^{(3)}(0) = f^{(4)}(0) = f^{(5)}(0) = 0$. Ponadto $f^{(6)}(x) = \operatorname{tg}^{(6)}(x)$ (bo szósta pochodna wielomianu piątego stopnia jest równa zero). Mamy $\operatorname{tg}'(x) = 1 + \operatorname{tg}^2(x)$ oraz $\operatorname{tg}''(x) = (1 + \operatorname{tg}^2(x))' = 2\operatorname{tg}(x)(1 + \operatorname{tg}^2(x)) = 2\operatorname{tg}(x) + 2\operatorname{tg}^3(x)$. Załóżmy, że n–ta pochodna funkcji tangens jest dana wzorem:

$$\operatorname{tg}^{(n)}(x) = a_{n,0} + a_{n,1}\operatorname{tg}(x) + a_{n,2}\operatorname{tg}^2(x) + a_{n,3}\operatorname{tg}^3(x) + \ldots + a_{n,n+1}\operatorname{tg}^{n+1}(x),$$

gdzie $a_{n,j} \geqslant 0$ dla $j = 0, 1, \ldots, n + 1$.
Tak jest np. dla $n = 2$. W tym wypadku $a_{2,0} = 0$, $a_{2,1} = 2$, $a_{2,2} = 0$ i $a_{2,3} = 2$.
Obliczając następną pochodną otrzymujemy (pochodna funkcji złożonej):

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}^{(n+1)}(x) &= \big(a_{n,1} + 2a_{n,2}\operatorname{tg}(x) + 3a_{n,3}\operatorname{tg}^2(x) + 4a_{n,4}\operatorname{tg}^3(x) + \ldots + (n+1)a_{n,n+1}\operatorname{tg}^n(x)\big)(1 + \operatorname{tg}^2(x)) = \\ &= a_{n,1} + 2a_{n,2}\operatorname{tg}(x) + (a_{n,1} + 3a_{n,3})\operatorname{tg}^2(x) + (2a_{n,2} + 4a_{n,4})\operatorname{tg}^3(x) + \ldots + \\ &\quad + \big((n-1)a_{n,n-1} + (n+1)a_{n,n+1}\big)\operatorname{tg}^n(x) + na_{n,n}\operatorname{tg}^{n+1}(x) + (n+1)a_{n,n+1}\operatorname{tg}^{n+2}(x),\end{aligned}$$

więc wzór na pochodną rzędu $(n + 1)$ wygląda tak samo, przy czym

$$a_{n+1,0} = a_{n,1},\ \ a_{n+1,1} = 2a_{n,2},\ \ a_{n+1,2} = a_{n,1} + 3a_{n,3},\ \ a_{n+1,3} = 2a_{n,2} + 4a_{n,4},\ \ldots,$$
$$a_{n+1,n} = (n-1)a_{n,n-1} + (n+1)a_{n,n+1},\ \ a_{n+1,n+1} = na_{n,n}\ \text{ i }\ a_{n+1,n+2} = (n+1)a_{n,n+1},$$

więc liczby $a_{n+1,j}$ są też nieujemne dla $j = 0, 1, 2, \ldots, n + 2$.
Widać więc, że każda z pochodnych funkcji tangens jest bardzo szczególnej postaci: jest wielomianem o wszystkich współczynnikach *nieujemnych* złożonym z funkcją tangens (dlaczego?). Ponieważ na

przedziale $[0, \frac{\pi}{2})$ funkcja tangens ma wartości nieujemne oraz wielomian o współczynnikach nieujemnych ma wartości nieujemne dla nieujemnych argumentów, to *wszystkie* pochodne funkcji tangens są *nieujemne* na przedziale $[0, \frac{\pi}{2})$. W szczególności $f^{(6)}(x) \geq 0$ dla $x \in [0, \frac{\pi}{2})$. Dalej postępujemy jak wyżej: $(f^{(5)}(x))' = f^{(6)}(x) \geq 0$ dla $x \in [0, \frac{\pi}{2})$, więc $f^{(5)}(x)$ jest niemalejąca na $\in [0, \frac{\pi}{2})$, ale $f^{(5)}(0) = 0$, więc $f^{(5)}(x) \geq 0$ dla $x \in [0, \frac{\pi}{2})$. Zatem $(f^{(4)}(x))' = f^{(5)}(x) \geq 0$ dla $x \in [0, \frac{\pi}{2})$, więc $f^{(4)}(x)$ jest niemalejąca na $\in [0, \frac{\pi}{2})$, ale $f^{(4)}(0) = 0$, więc $f^{(4)}(x) \geq 0$ dla $x \in [0, \frac{\pi}{2})$, itd. $\square$

Dodać należy, że to spojrzenie na wielomian Taylora funkcji funkcji tangens w punkcie 0 pozwala na stwierdzenie, że na przedziale $(0, \frac{\pi}{2})$ wartości funkcji tangens są większe od wartości jej wielomianu Taylora w punkcie 0 niezależnie od tego, którym wielomianem się interesujemy.

Druga wariacja na temat rozwiązania pierwszej części zadania 1. Również ten tekst został napisany przez mgr Michała Strzeleckiego i troszkę przeze mnie zmieniony.
Tym razem żadnej funkcji nie będziemy różniczkować więcej niż dwa razy. Skorzystamy z nierówności $\operatorname{tg}(x) > x$ dla $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Tę nierówność uzasadniliśmy geometrycznie jeszcze w październiku (koło trygonometryczne). Moglibyśmy też napisać, że funkcja tangens jest *ściśle wypukła* (dlaczego?) na przedziale $[0, \frac{\pi}{2})$, więc prosta o równaniu $y = x$, która jest styczna (w punkcie $(0,0)$) do jej wykresu, leży pod tym wykresem.

Teraz wykażemy, że $\operatorname{tg}(x) > x + \frac{x^3}{3}$ dla $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Oznaczmy $g(x) = \operatorname{tg}(x) - (x + \frac{x^3}{3})$. Mamy $g'(x) = 1 + \operatorname{tg}^2(x) - 1 - x^2 = \operatorname{tg}^2(x) - x^2 > 0$ (nierówność wynika z nierówności z poprzedniego akapitu), więc funkcja g jest ściśle rosnąca na przedziale $[0, \frac{\pi}{2})$. Jako że $g(0) = 0$, to $g(x) > g(0) = 0$ dla $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Czyli rzeczywiście zachodzi postulowana nierówność.

Przechodzimy do nierówności z treści zadania, to jest $\operatorname{tg}(x) > x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15}$ dla $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Oznaczmy $f(x) = \operatorname{tg}(x) - (x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15})$. Jeśli $0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}$, to $f'(x) = 1 + \operatorname{tg}^2(x) - 1 - x^2 - \frac{2x^4}{3} = \operatorname{tg}^2(x) - x^2 - \frac{2x^4}{3}$ oraz, dla $x \in (0, \frac{\pi}{2})$,

$$f''(x) = 2\operatorname{tg}(x)(1 + \operatorname{tg}^2(x)) - 2x - \tfrac{8x^3}{3} = 2\big(\operatorname{tg}(x) + \operatorname{tg}^3(x) - x - \tfrac{4x^3}{3}\big) >$$
$$> 2\big((x + \tfrac{x^3}{3}) + \operatorname{tg}^3(x) - x - \tfrac{4x^3}{3}\big) = 2\left(\operatorname{tg}^3(x) - x^3\right) > 0$$

(skorzystaliśmy z oszacowania tangensa uzyskanego w poprzednim akapicie i nierówności $\operatorname{tg} x > x$ z pierwszego akapitu).

Ponieważ $f''(x) > 0$ dla $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, więc funkcja $f'(x)$ jest ściśle rosnąca na $[0, \frac{\pi}{2})$. Wobec tego $f'(x) > f(0) = 0$ dla $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Funkcja f jest więc ściśle rosnąca na $[0, \frac{\pi}{2})$, zatem $f(x) > f(0) = 0$ dla $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Otrzymaliśmy tezę. $\square$

---

2. Obliczyć granice

(5 p.) $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt[3]{x} \cdot \ln x$ oraz

(5 p.) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln(\sqrt[3]{1+x^9}+17)}{\sqrt[13]{7+x}}$

Rozwiązanie. Mamy $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt[3]{x}\cdot\ln x = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x^{-1/3}}$. Zastosujemy regułę de l'Hospitala. Można bo granicą mianownika jest $+\infty$. Mamy $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x^{-1/3}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{3}x^{-4/3}} = -\lim\limits_{x\to 0^+} -x^{1/3} = 0$.

W celu obliczenia drugiej granicy też skorzystamy z reguły de l'Hospitala, co można zrobić, bo mianownik dąży do ∞. Mamy

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(\sqrt[3]{1+x^9}+17)}{\sqrt[13]{7+x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt[3]{1+x^9}+17}\cdot 3(1+x^9)^{-2/3}\cdot x^8}{\frac{1}{13}(7+x)^{-12/13}} = \lim_{x\to\infty} 39\frac{x^8\cdot(7+x)^{12/13}}{(\sqrt[3]{1+x^9}+17)(1+x^9)^{2/3}} =$$
$$= 39\lim_{x\to\infty} \frac{x^{8+12/13}\cdot(7/x+1)^{12/13}}{x^9(\sqrt[3]{x^{-9}+1}+17x^{-3})(x^{-9}+1)^{2/3}} = 39\lim_{x\to\infty} \frac{(7/x+1)^{12/13}}{x^{1/13}(\sqrt[3]{x^{-9}+1}+17x^{-3})(x^{-9}+1)^{2/3}} = 0$$

— w drugim wierszu wzoru wyrażenia w nawiasach dążą do 1 oraz $\lim\limits_{x\to\infty} x^{1/3} = \infty$. □

Pierwszą z granic można znaleźć łatwo bez reguły de l'Hospitala korzystając zamiast niej jedynie z nierówności $\ln x < x-1$, która zachodzi dla $0 < x \neq 1$. Załóżmy, że $0 < x < 1$ i $a > 0$, np. $a = \frac{1}{3}$. Wtedy $0 > x^a \ln x = -\frac{2}{a}x^a \ln(x^{-a/2}) > -\frac{2}{a}x^a(x^{-a/2}-1) > -\frac{2}{a}x^a \cdot x^{-a/2} = -\frac{2}{a}x^{a/2} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$. Wykazaliśmy, że granicą funkcji jest 0 i to nie tylko dla $a = \frac{1}{3}$, ale też dla dowolnego $a > 0$.

To samo dotyczy drugiej granicy. Zauważmy najpierw, że $\sqrt[3]{a+b} < \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$ dla dowolnych dodatnich liczb a, b — dla dowodu wystarczy podnieść obie strony tej nierówności do trzeciej potęgi. Dla $x > 3$ mamy $18 < x^3$ oraz $0 < \frac{\ln(\sqrt[3]{1+x^9}+17)}{\sqrt[13]{7+x}} < \frac{\ln(1+x^3+17)}{\sqrt[13]{7+x}} < \frac{\ln(2x^3)}{\sqrt[13]{x}} = \frac{\ln 2 + 3\cdot 26\cdot \ln(x^{1/26})}{x^{1/13}} < {}$ $< \frac{\ln 2}{x^{1/13}} + \frac{78(x^{1/26}-1)}{x^{1/13}} < \frac{\ln 2}{x^{1/13}} + \frac{78x^{1/26}}{x^{1/13}} = \frac{\ln 2}{x^{1/13}} + \frac{78}{x^{1/26}} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$. Wykazaliśmy, że granicą jest 0 (twierdzenie o trzech funkcjach). □

---

3. (5 p.) Wykazać, że jeśli $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$, to $\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha > \beta - \alpha > \sin\beta - \sin\alpha$.
(5 p.) Wykazać, że jeśli $s < t$, to $(t-s)\cdot 2^t \cdot \ln 2 > 2^t - 2^s > (t-s)\cdot 2^s \cdot \ln 2$.
Rozwiązanie. Przypominam, że jeśli funkcja f jest różniczkowalna na przedziale $[a,b]$, to istnieje taka liczba $c \in (a,b)$, że $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ — to twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej. Jeśli $\beta \leqslant 0$ lub $0 \leqslant \alpha$, to z tw. o wart. średniej wynika istnienie takich liczb $c, d \in (\alpha,\beta) \subset \big(-\frac{\pi}{2}, 0\big)$ lub $c, d \in (\alpha,\beta) \subset \big(0, \frac{\pi}{2}\big)$, że $\frac{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha}{\beta-\alpha} = \frac{1}{\cos^2 c} > 1$ oraz $\frac{\sin\beta - \sin\alpha}{\beta - \alpha} = \cos d < 1$. Z tych nierówności pierwsza część tezy wynika od razu, gdy α i β leżą po tej samej stronie punktu 0. Jeśli $\alpha < 0 < \beta$, to $\operatorname{tg}\beta > \beta$ i $\operatorname{tg}(-\alpha) > -\alpha$, zatem $\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}(-\alpha) > \beta + (-\alpha) = \beta - \alpha$. Podobnie $\sin\beta < \beta$ i $\sin(-\alpha) < -\alpha$, więc $\sin\beta - \sin\alpha = \sin\beta + \sin(-\alpha) < \beta + (-\alpha) = \beta - \alpha$.

Ponieważ pochodną funkcji $2^x = e^{x\ln 2}$ jest $e^{x\ln 2}\ln 2 = 2^x \ln 2$, więc istnieje taka liczba $x \in (s,t)$, że $\frac{2^t - 2^s}{t-s} = 2^x \ln 2$. Oczywiście $2^t > 2^x > 2^s$, a stąd teza wynika od razu. □

Inna metoda.
Niech $f(\beta) = \operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha - \beta + \alpha$. Wtedy $f(\alpha) = 0$ oraz $f'(\beta) = 1 + \operatorname{tg}^2\beta - 1 = \operatorname{tg}^2\beta > 0$ dla $\beta \neq 0$. Stąd wynika, że funkcja f jest ściśle rosnąca na każdym przedziale zawartym w swej dziedzinie, w tym na przedziale $[\alpha, \frac{\pi}{2})$. Stąd wynika, że jeśli $\alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$, to $f(\beta) > f_n(\alpha) = 0$. Otrzymaliśmy pierwszą nierówność. Drugą otrzymamy praktycznie w ten sam sposób. Niech $g(\beta) = \beta - \alpha - \sin\beta + \sin\alpha$. Mamy $g(\alpha) = 0$ oraz $g'(\beta) = 1 - \cos\beta > 0$, gdy $0 < |\beta| < \frac{\pi}{2}$, więc funkcja g jest ściśle rosnąca na przedziale $[\alpha, \frac{\pi}{2})$, zatem jeśli $\alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$, to $g(\beta) > g_n(\alpha) = 0$, co kończy dowód drugiej nierówności.

Dla dowodu nierówności z drugiej części zadania badamy funkcje zmiennej t przy ustalonym s: $(t-s)\cdot 2^t \cdot \ln 2 - (2^t - 2^s)$ oraz $2^t - 2^s - (t-s)\cdot 2^s \cdot \ln 2$. Mamy $\big(2^t\big)' = \big(e^{t\ln 2}\big)' = e^{t\ln 2}\ln 2 = 2^t \ln 2$. Obie funkcje przyjmują wartość 0 w punkcie s. Mamy też
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big((t-s)\cdot 2^t \cdot \ln 2 - (2^t - 2^s)\big) = 2^t \cdot \ln 2 + (t-s)2^t(\ln 2)^2 - 2^t \cdot \ln 2 = (t-s)2^t(\ln 2)^2 > 0$ dla $t > s$, zatem funkcja $(t-s)\cdot 2^t \cdot \ln 2 - (2^t - 2^s)$ zmiennej t jest ściśle rosnąca na półprostej $[s,\infty)$, więc jest dodatnia na półprostej (s,∞), co dowodzi lewej nierówności. Prawa nierówność wynika z tego, że $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(2^t - 2^s - (t-s)\cdot 2^s \cdot \ln 2\big) = 2^t \ln 2 - 2^s \ln 2 > 0$ dla $t > s$, bo z tej nierówności wynika, że funkcja $2^t - 2^s - (t-s)\cdot 2^s \cdot \ln 2$ jest ściśle rosnąca na półprostej $[s,\infty)$. □

I jeszcze jedna uwaga. Jeśli $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$, to krótszy z dwóch łuków okręgu jednostkowego, których końcami są punkty $A = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ i $B = (\cos\beta, \sin\beta)$ ma długość $\beta - \alpha$. Długość odcinka AB jest mniejsza do długości tego łuku. Odcinek AB to przeciwprostokątna w trójkącie o wierzchołkach A, B i $C = (\cos\beta, \sin\alpha)$, więc jest dłuższy od przyprostokątnej BC, której długość jest równa $\sin\beta - \sin\alpha$ (jeśli $\beta = -\alpha$ to $A = C$, więc trójkąt ABC staje się odcinkiem i odcinki AB

oraz CB mają tę samą długość, ale to nie zmienia dowodu, bo łuk jest dłuższy od cięciwy). $\square$

Znany mi geometryczny dowód nierówności $\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha > \beta - \alpha$ jest istotnie trudniejszy od podanego wyżej, więc go nie umieszczam w tym opowiadanku.

---

4. Niech $f(x) = \sqrt[3]{x(x^2-1)^5(x+2)^2}$. Dla $x \neq 0, -2, \pm 1$ zachodzą równości
$f'(x) = \frac{1}{3}(13x^3 + 22x^2 - 3x - 2) \cdot \sqrt[3]{\frac{(x^2-1)^2}{x^2(x+2)}}$ i $f''(x) = \frac{2\cdot(65x^6+220x^5+131x^4-140x^3-92x^2-4)}{9\cdot\sqrt[3]{x^5(x+2)^4(x^2-1)}}$.
Wielomian $13x^3+22x^2-3x-2$ ma trzy pierwiastki: $x_1 \approx -1{,}77$, $x_2 \approx -0{,}26$, $x_3 \approx 0{,}34$.
Wielomian $65x^6 + 220x^5 + 131x^4 - 140x^3 - 92x^2 - 4$ ma cztery pierwiastki rzeczywiste $x_4 \approx -2{,}07$, $x_5 \approx -1{,}47$, $x_6 \approx -0{,}68$ i $x_7 \approx 0{,}78$. Istnieją takie liczby rzeczywiste p i q, że $p^2 - 4q < 0$ oraz $65x^6 + 220x^5 + 131x^4 - 140x^3 - 92x^2 - 4 =$
$= 65(x-x_4)(x-x_5)(x-x_6)(x-x_7)(x^2+px+q)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

(1 p.) Podać definicję pochodnej funkcji f w punkcie p i wyjaśnić, w jakich punktach funkcja f ma pochodną pierwszego rzędu, niekoniecznie skończoną.

(2 p.) Znaleźć przedziały, na których funkcja f maleje, na których rośnie.

(2 p.) Znaleźć przedziały, na których funkcja f jest wypukła, na których jest wklęsła.

(1 p.) Obliczyć granice funkcji f i jej pochodnej f' przy $x \longrightarrow \pm\infty$.

(4 p.) Na podstawie uzyskanych informacji naszkicować wykres funkcji f.

Rozwiązanie. Pochodną funkcji f w punkcie p nazywamy granicę $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(p+h)-f(p)}{h}$.

Mamy $f(0) = 0$, więc $f'(0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(h)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{h(h^2-1)^5(h+2)^2}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \sqrt[3]{\frac{(h^2-1)^5(h+2)^2}{h^2}} = -\infty$, bo $\lim\limits_{h\to 0}(h^2-1)^5(h+2)^2 = -4$ i $h^2 > 0$ oraz $\lim\limits_{h\to 0} h^2 = 0$, zatem $f'(0) = -\infty$.
Analogicznie $f'(-2) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(-2+h)-f(-2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(-2+h)}{h}$. Mamy więc

$$f'_+(-2) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(-2+h)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt[3]{(-2+h)((-2+h)^2-1)^5 h^2}}{h} = \lim_{h\to 0^+} \sqrt[3]{\frac{(-2+h)((-2+h)^2-1)^5}{h}} = -\infty$$

— granicą licznika wyrażenia podpierwiastkowego jest $-2 \cdot 3^5 = -486$ zaś mianownik jest dodatni i ma granicę 0. Podobny rachunek przekonuje nas o tym, że $f'_-(-2) = +\infty$ — jedyna zmiana w rozumowaniu to zmiana znaku mianownika, bo tym razem $h < 0$. Wobec tego, że jednostronne pochodne są różne, pochodnej w punkcie -2 funkcja nie ma.
Styczną do wykresu w punkcie $(0,0)$ jest prosta o równaniu $x = 0$ (czyli pionowa oś układu współrzędnych), a styczną wspólną do „prawej" i „lewej" części wykresu w punkcie $(-2,0)$ — prosta o równaniu $x = -2$ (więc pionowa).

Pierwsza pochodna zmienia swój znak przy przejściu argumentu z lewej strony każdego z punktów $-2, x_1, x_2, x_3$ na jego prawą stronę, bo $f'(x) = \frac{13}{3}(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) \cdot \sqrt[3]{\frac{(x^2-1)^2}{x^2(x+2)}}$. Przy przejściu z lewej strony na prawą każdego z punktów $-1, 0, 1$ znak pozostaje niezmieniony.

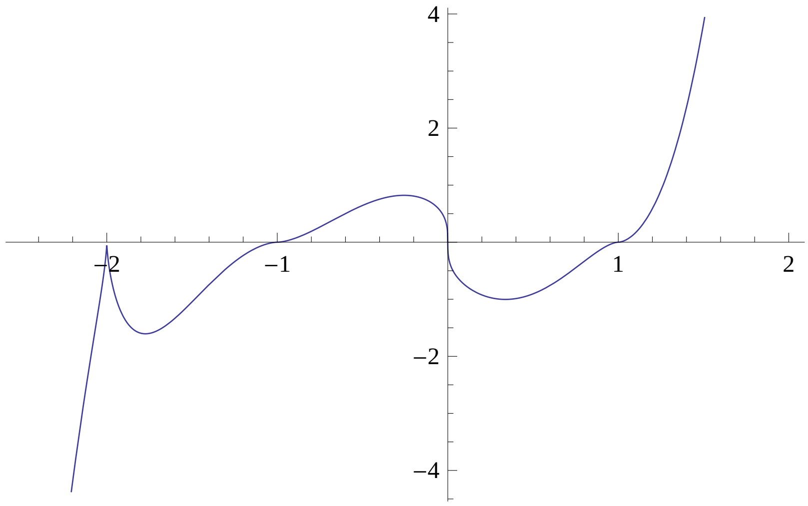
Na prawo od punktu x_3 wszystkie czynniki są dodatnie, więc $x > x_3 \Rightarrow f'(x) > 0$ i wobec tego $x_2 < x < x_3 \Rightarrow f'(x) < 0$, $x_1 < x < x_2 \Rightarrow f'(x) > 0$, $-2 < x < x_1 \Rightarrow f'(x) < 0$ i wreszcie $x < -2 \Rightarrow f'(x) > 0$. Wobec tego na każdym z przedziałów $(-\infty, -2]$, $[x_1, x_2]$ i $[x_3, \infty)$ funkcja f rośnie, zaś na każdym z przedziałów $[-2, x_1]$, $[x_2, x_3]$ — maleje.

Zauważmy, że warunek $p^2 - 4q < 0$ oznacza, że wielomian kwadratowy

$$x^2 + px + q = =(x+\tfrac{p}{2})^2 + q - \tfrac{p^2}{4} = (x+\tfrac{p}{2})^2 + \tfrac{4q-p^2}{4}$$

przyjmuje jedynie wartości dodatnie, więc ten czynnik nie ma wpływu na znak drugiej pochodnej. Podobnie czynnik $(x+2)^4$. Natomiast pozostałe czynniki, tj. $x-x_4$, $x-x_5$, $x+1$, $x-x_6$, x^5, $x-x_7$ i $x-1$ mają wpływ. W punktach -2, -1, 0 oraz 1 funkcja f drugiej pochodnej nie ma, bo nie ma w nich pierwszej pochodnej lub pierwsza jest nieskończona lub jednostronne drugie pochodne są różne (i nieskończone). Wobec tego druga pochodna jest dodatnia na każdym z przedziałów $(1,\infty)$, $(0,x_7)$, $(-1,x_6)$, $(-2,x_5)$ i $(x_4,-2)$. Na przedziałach $(x_7,1)$, $(x_6,0)$, $(x_5,-1)$ i $(-\infty,x_4)$ druga pochodna jest ujemna. Wobec tego funkcja f jest ściśle wypukła na każdym z przedziałów $[1,\infty)$, $[0,x_7]$, $[-1,x_6]$, $[-2,x_5]$ i $[x_4,-2]$. Na każdym z przedziałów $[x_7,1]$, $[x_6,0]$, $[x_5,-1]$ i $(-\infty,x_4]$ funkcja f jest ściśle wklęsła.

Zachodzą oczywiste równości $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[3]{x(x^2-1)^5(x+2)^2}=+\infty$ i $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt[3]{x(x^2-1)^5(x+2)^2}=-\infty$ — pod pierwiastkiem jest wielomian stopnia 13. Mamy $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{3}(13x^3+22x^2-3x-2)\cdot\sqrt[3]{\frac{(x^2-1)^2}{x^2(x+2)}}=$ $=\frac{1}{3}\lim\limits_{x\to\infty}(13x^3+22x^2-3x-2)\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[3]{\frac{(x^2-1)^2}{x^2(x+2)}}=\frac{1}{3}\cdot(+\infty)\cdot+(\infty)=+\infty$, bo po pierwiastkiem znalazł się iloraz wielomianu czwartego stopnia przez wielomian trzeciego stopnia. Zachodzą równości $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{3}(13x^3+22x^2-3x-2)\cdot\sqrt[3]{\frac{(x^2-1)^2}{x^2(x+2)}}=\frac{1}{3}\lim\limits_{x\to-\infty}(13x^3+22x^2-3x-2)\cdot\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt[3]{\frac{(x^2-1)^2}{x^2(x+2)}}=$ $=\frac{1}{3}\cdot(-\infty)\cdot(-\infty)=+\infty$. Pomocne w dokładniejszym uzasadnieniu są równości $13x^3+22x^2-3x-2=$ $=x^3\left(13+\frac{22}{x}-\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x^3}\right)$ i $\sqrt[3]{\frac{(x^2-1)^2}{x^2(x+2)}}=x\cdot\sqrt[3]{\frac{(1-1/(x^2))^2}{1+2/x}}$.



Wykres narysował program Wolfram Mathematica 7 na moją prośbę. Dziedzinę ograniczyłem, jak widać, do dosyć krótkiego przedziału ($[-2.5,\ 2]$), bo poza tym przedziałem funkcja ma duże wartości ($f(2)\approx 19,8$, $f(2.5)\approx 58,7$). W rezultacie gdybym rozpatrywał dłuższy przedział, to nie byłoby widać, co się dzieje na przedziale $[-2.5,\ 2]$. Na wykresie słabo widać wypukłość funkcji na przedziale $[x_4,-2]$, bo ten przedział jest bardzo krótki, a na lewo od niego funkcja jest już wklęsła. Podkreślić warto, że ze ścisłej wypukłości funkcji na przedziałach $[x_4,-2]$ i $[-2,x_5]$ **nie** wynika jej wypukłość na przedziale $[x_4,x_5]$.

---

5. **(5 p.)** Dla każdej liczby $s>0$ znaleźć taką liczbę $t_s\in\mathbb{R}$, że styczne do wykresu funkcji x^2 w punktach (s,s^2) i (t_s,t_s^2) są prostopadłe.

(5 p.) Jaka jest najmniejsza odległość punktów (s,s^2) i (t_s,t_s^2) dla $s>0$, gdzie t_s jest liczbą opisaną w poprzedniej części tego zadania?

Rozwiązanie. Mamy $(x^2)'=2x$. Wobec tego równaniem stycznej do wykresu funkcji x^2 w punkcie (s,s^2) jest $y=2sx-s^2$, a w punkcie (t_s,t_s^2) — $y=2t_sx-t_s^2$. Ponieważ te proste mają być prostopadłe, więc $2s\cdot 2t_s=-1$, zatem $t_s=-\frac{1}{4s}$. Trzeba zminimalizować odległość punktów (s,s^2) i $(-\frac{1}{4s},\frac{1}{16s^2})$. Zajmiemy się oczywiście kwadratem ich odległości, tzn. wielkością

$$\left(s+\tfrac{1}{4s}\right)^2+\left(s^2-\tfrac{1}{16s^2}\right)^2=s^2+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{16s^2}+s^4-\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{256s^4}=s^2+\tfrac{3}{8}+\tfrac{1}{16}s^{-2}+s^4+\tfrac{1}{256}s^{-4}.$$

Jej pochodną jest
$2s-\frac{1}{8}s^{-3}+4s^3-\frac{1}{64}s^{-5}=\frac{1}{64}s^{-4}\left(128s^6-8s^2+256s^8-1\right)=\frac{1}{64}s^{-4}\big((2s)^8+2(2s)^6-2(2s)^2-1\big)=$
$=(2s-1)\big((2s)^7+(2s)^6+3(2s)^5+3(2s)^4+3(2s)^3+3(2s)^2+2s+1\big).$
Ta pochodna jest dodatnia dla $2s>1$, czyli dla $s>\frac{1}{2}$, a jeśli $0<s<\frac{1}{2}$ — ujemna. Wynika stąd, że kwadrat interesującej nas odległości wzrasta ze wzrostem s na półprostej $\left[\frac{1}{2},\infty\right)$, zaś na przedziale $\left(0,\frac{1}{2}\right]$ — maleje, więc swą najmniejszą wartość przyjmuje dla $s=\frac{1}{2}$. Jest ona wtedy równa 1. □

Inne rozwiązanie drugiej części zadania 5. autorstwa mgr Michała Strzeleckiego nieco zmienione przeze mnie.

Uprościmy najpierw funkcję którą chcemy zminimalizować.

$$\begin{aligned}\left(s+\frac{1}{4s}\right)^2+\left(s^2-\frac{1}{16s^2}\right)^2&=\left(s+\frac{1}{4s}\right)^2+\left(\left(s+\frac{1}{4s}\right)\left(s-\frac{1}{4s}\right)\right)^2=\left(s+\frac{1}{4s}\right)^2+\left(s+\frac{1}{4s}\right)^2\left(s-\frac{1}{4s}\right)^2\\&=\left(s+\frac{1}{4s}\right)^2\left(1+\left(s-\frac{1}{4s}\right)^2\right)=\left(s+\frac{1}{4s}\right)^2\left(1+s^2-\frac{1}{2}+\frac{1}{16s^2}\right)\\&=\left(s+\frac{1}{4s}\right)^2\left(s^2+\frac{1}{2}+\frac{1}{16s^2}\right)=\left(s+\frac{1}{4s}\right)^2\left(s+\frac{1}{4s}\right)^2=\left(s+\frac{1}{4s}\right)^4\end{aligned}$$

(powyżej trzykrotnie skorzystaliśmy ze wzorów skróconego mnożenia). Widzimy, że wartość naszej funkcji jest tym mniejsza, im mniejsza jest wartość wyrażenia $s+\frac{1}{4s}$. Pochodna $(s+\frac{1}{4s})'=1-\frac{1}{4s^2}$ jest ujemna dla $s\in(0,\frac{1}{2})$, równa zero dla $s=\frac{1}{2}$, dodatnia dla $s\in(\frac{1}{2},\infty)$, więc minimum wyrażenia $s+\frac{1}{4s}$ jest przyjmowane dla $s=\frac{1}{2}$ (i jest równe 1). Kwadrat interesującej nas odległości jest więc także najmniejszy dla $s=\frac{1}{2}$ (i równy $1^4=1$).[1]

Jeszcze inne rozwiązanie drugiej części zadania 5. autorstwa mgr Michała Strzeleckiego nieco zmienione przeze mnie.

Funkcja, którą chcemy zminimalizować jest sumą dwóch nieujemnych wyrażeń:

$$\left(s+\tfrac{1}{4s}\right)^2 \qquad \text{oraz} \qquad \left(s^2-\tfrac{1}{16s^2}\right)^2.$$

Drugie z tych wyrażeń tj. $(s^2-\frac{1}{16s^2})^2$, jest równe 0 dla $s^2=\frac{1}{16s^2}$, czyli $s=\frac{1}{2}$ (korzystamy z tego, że $s>0$ (!)) – jest to oczywiście najmniejsza jego wartość.

Pierwsze z tych wyrażeń tj. $(s+\frac{1}{4s})^2$, jest tym mniejsze, im mniejsza jest wartość wyrażenia $s+\frac{1}{4s}$. Pochodna $(s+\frac{1}{4s})'=1-\frac{1}{4s^2}$ jest ujemna dla $s\in(0,\frac{1}{2})$, równa zero dla $s=\frac{1}{2}$, dodatnia dla $s\in(\frac{1}{2},\infty)$, więc minimum wyrażenia $s+\frac{1}{4s}$ jest przyjmowane dla $s=\frac{1}{2}$ (i jest równe 1).[2]

Funkcja, którą chcemy zminimalizować jest więc sumą dwóch wyrażeń z których każde przyjmuje najmniejszą wartość $s=\frac{1}{2}$ (!). Korzystając z tego szczęśliwego zbiegu okoliczności stwierdzamy, że kwadrat interesującej nas odległości jest także najmniejszy dla $s=\frac{1}{2}$ (i równy $1^2+0^2=1$).

---

[1] Można też nie użyć pochodnej w ogóle: $s+\frac{1}{4s}=(\sqrt{s}-\frac{1}{2\sqrt{s}})^2+1\geqslant 1$, przy czym równość zachodzi jedynie wtedy, gdy $0=\sqrt{s}-\frac{1}{2\sqrt{s}}=\frac{2s-1}{2\sqrt{s}}\iff 2s-1=0\iff s=\frac{1}{2}$.

[2] Ten sam wynik można uzyskać bez pochodnych: $(s+\frac{1}{4s})^2=s^2+\frac{1}{2}+\frac{1}{16s^2}=s^2-\frac{1}{2}+\frac{1}{16s^2}+1=(s-\frac{1}{4s})^2+1\geqslant 1$, przy czym równość zachodzi $\iff 0=s-\frac{1}{4s}=\frac{4s^2-1}{4s}\iff 4s^2=1\iff s=\frac{1}{2}$.