

Matematyka A, kolokwium, 2 grudnia 2015, 18:10 – 20:05

Rozwiązania różnych zadań mają znaleźć się na różnych kartkach, bo sprawdzać je będą różne osoby. Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU nazwiskiem i imieniem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia.

Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; posiadane muszą być schowane i wyłączone! Nie dotyczy rozruszników serca.

Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały udowodnione na wykładzie lub na ćwiczeniach.

Należy przeczytać **CAŁE** zadanie **PRZED** rozpoczęciem rozwiązywania go!

1. Obliczyć granice

(2 p.) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2+2n+1}{3+2n+n^2}$ oraz

(8 p.) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!+n^n}{(n+1)^n}$.

2. Obliczyć granice

(2 p.) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{966n^{972}+1000n^{1025}}{1138n^{1241}+1320n^{1333}+1410n^{1525}}$ oraz

(8 p.) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(966n^{972}+1000n^{1025})}{\ln(1138n^{1241}+1320n^{1333}+1410n^{1525})}$

3. Obliczyć granice

(4 p.) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1,543^n + 1,572^n}$ oraz

(6 p.) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^3 \cdot 1,543^n + n^2 \cdot 1,572^n}$.

4. Rozstrzygnąć, czy istnieje taka liczba naturalna k , że dla każdego $n > k$ zachodzi nierówność i jeśli istnieje, wskazać jakąś, niekoniecznie najmniejszą:

(5 p.) $\sin \frac{n+1}{n^2} < \frac{1}{\sqrt{n}}$,

(5 p.) $\sin \frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{n+1}{n^2}$.

5. (3 p.) Korzystając z definicji pochodnej obliczyć $f'(0)$, jeśli

$$f(x) = \operatorname{tg}(\sin x) \left(\cos x + \ln(e^{\sqrt{|x|+x^2}}) \right).$$

(4 p.) Obliczyć pochodne funkcji $\left(\frac{x}{x^2+4}\right)^{\sin(2x)}$ i $x\sqrt{x^2+1} + \ln(x + \sqrt{x^2+1})$.

(3 p.) Znaleźć taką liczbę $a \in \mathbb{R}$, że jeśli $f(x) = e^{ax}$, to $(f'(x))' - 6f'(x) + 9f(x) = 0$ dla każdej liczby $x \in \mathbb{R}$.

Ciekawostki (któż wie, co i kiedy się może przydać):

2 grudnia 1789 – czarna procesja, **2 grudnia 1805 pod Austerlitz – bitwa trzech cesarzy**,

$x > 0 \implies 0 < \sin x < x$, 9 kwietnia 1241 r. – bitwa pod Legnicą,

$0 < x < 1 \implies \sin x > x - x^3$, 21 maja 1543 zmarł Mikołaj Kopernik

25 kwietnia 1333 – koronacja Kazimierza, $3^3 = 27$, $3^6 = 729$, $3^9 = 19683$, $3^{12} = 531441$, $11^2 = 121$,

$11^3 = 1331$, $11^4 = 14641$, $11^5 = 161051$, $11^6 = 1771561$, $11^7 = 12400927$, $7^2 = 49$, $7^4 = 2401$,

$7^6 = 117649$, $51^2 = 2601$, $52^2 = 2704$, $53^2 = 2809$, $54^2 = 2916$, $64^2 = 4096$, $65^2 = 4225$, $66^2 = 4356$,

$67^2 = 4489$, $666^2 = 443556$, $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $\cos \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}$, $\sin \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.