

## Matematyka A, kolokwium, 3 listopada 2015, 18:45 – 20:30

Rozwiązania różnych zadań mają znaleźć się na różnych kartkach, bo sprawdzać je będą różne osoby. Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU nazwiskiem i imieniem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia.

**Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; posiadane muszą być schowane i wyłączone!** Nie dotyczy rozruszników serca.

*Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!*

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały udowodnione na wykładzie lub na ćwiczeniach.

---

Należy przeczytać **CAŁE** zadanie **PRZED** rozpoczęciem rozwiązywania go!

---

1. Niech  $A = (1, 2, 3)$ ,  $B = (8, 6, 7)$ ,  $C = (9, 3, 7)$ .
  - (2 p.) Znaleźć  $\vec{AB} \times \vec{AC}$ .
  - (1 p.) Obliczyć długości odcinków  $AB$  i  $BC$ .
  - (2 p.) Obliczyć pole równoległoboku  $ABCD$  wyznaczonego przez wektory  $\vec{AB}$  i  $\vec{AC}$ .
  - (1 p.) Obliczyć odległość punktu  $A$  od prostej  $BC$ .
  - (2 p.) Znaleźć równanie płaszczyzny zawierającej punkty  $A, B, C$ .
  - (2 p.) Znaleźć punkt  $X$ , który dzieli odcinek  $AC$  w stosunku  $3 : 1$ , czyli  $\frac{AX}{XC} = 3$ .
2. Niech  $A = (3, 1, 2)$ ,  $B = (10, 5, 6)$ ,  $C = (11, 2, 6)$ .
  - (3 p.) Podać definicję kosinusa dowolnego kąta  $\varphi > 0$ .
  - (2 p.) Obliczyć kosinus kąta  $\psi$  między wektorami  $\vec{AB}$  i  $\vec{AC}$ .
  - (2 p.) Rozstrzygnąć, czy kąt  $\psi$  jest większy czy mniejszy od kąta  $\frac{\pi}{6}$ .
  - (3 p.) Znaleźć objętość ostrosłupa, którego podstawą jest równoległobok  $ABDC$ , gdzie  $D = B + C - A$ , a wierzchołkiem jest punkt  $W = (3, 1, 3)$ .
3. (4 p.) Podać definicję logarytmu liczby  $x$  przy podstawie  $y$ . Jakie liczby wolno logarytmować i przy jakich podstawach?
  - (6 p.) Rozwiązać nierówność  $1 + 2 \log_2 \sin(t - \frac{\pi}{6}) < 0$  i zaznaczyć na okręgu o równaniu  $x^2 + y^2 = 1$  zbiór złożony ze wszystkich punktów postaci  $(\cos t, \sin t)$ .
4. (4 p.) Dowieść, że  $\log_{10} 7 + \log_{10} 11 + \log_{10} 13 > 3$ .
  - (3 p.) Która liczba jest większa  $3 \log_{10} 13 + \log_{10} 5$  czy  $3 + \log_{10} 11$ ?
  - (3 p.) Wykazać, że liczba  $\log_{10} 12345$  nie jest całkowita.
5. (10 p.) Rozwiązać układ równań 
$$\begin{cases} x^3 + y^2 = 33, \\ 3 \log_{10} x + 2 \log_{10} y = 2 + \log_{10} 2. \end{cases}$$