

Rozwiązania różnych zadań należy napisać na różnych kartkach, bo sprawdzą je różne osoby. Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU imieniem i nazwiskiem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia. **Nie wolno korzystać z urządzeń elektronicznych (kalkulatorów, telefonów komórkowych itp.); posiadane muszą być schowane i wyłączone!** Nie dotyczy rozruszników serca. *Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!*

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały udowodnione na wykładzie lub na ćwiczeniach.

Należy przeczytać **CAŁE** zadanie **PRZED** rozpoczęciem rozwiązywania go!

1. (3 p.) Niech $f(x, y) = (x^2 + y^2 - 25)(3x + 4y - 25)$. Wiadomo, że
 $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x(3x + 4y - 25) + 3(x^2 + y^2 - 25)$ i $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y(3x + 4y - 25) + 4(x^2 + y^2 - 25)$.
- (2 p.) Znaleźć punkty zerowania się gradientu funkcji f .
- (2 p.) Znaleźć lokalne ekstrema funkcji f .
- (3 p.) Znaleźć największą i najmniejszą wartość funkcji f w kole $\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.
- (3 p.) Znaleźć największą i najmniejszą wartość funkcji f w kole $\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 25\}$.

2. (7 p.) Znaleźć wszystkie takie liczby zespolone z , że $z^{16} + 81z^{12} + 64z^4 + 5184 = 0$.
- (3 p.) Zaznaczyć wszystkie znalezione w poprzednim punkcie liczby na płaszczyźnie.

3. (3 p.) Rozwiązać równanie $x''(t) + 2x'(t) + 50x(t) = 0$.
- (7 p.) Rozwiązać równanie $x''(t) + 2x'(t) + 50x(t) = 49e^{-t} + 197 \cos(7t) + 14e^{-t} \cos(7t)$.

4. (10 p.) Pojemnik zawiera 400 litrów wody, w której rozpuszczono 25 kg soli kuchennej. Do pojemnika wlewana jest woda w tempie 12 litrów na minutę, zawierająca $\frac{1}{4}$ kg soli w każdym litrze. Jednocześnie przez otwór w dole pojemnika wypływa bardzo dokładnie wymieszana woda z solą z prędkością 8 litrów na minutę (więc w pojemniku jest coraz więcej płynu).
- Ile soli znajdzie się w pojemniku, gdy objętość płynu równa będzie 500 l?
- Ile soli znajdzie się w pojemniku, gdy objętość płynu równa będzie 800 l?

5. Znaleźć rozwiązanie ogólne układu równań

$$\begin{cases} x'(t) = -11x(t) - 2y(t), \\ y'(t) = 2x(t) - 7y(t), \end{cases}$$

oraz rozwiązanie, które spełnia warunki $x(0) = -1$ oraz $y(0) = 0$

6. Niech $A = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 3, x + y - z \geq 1\}$.
- (2 p.) Znaleźć objętość zbioru A . Narysować A .
- (2 p.) Dla każdej liczby $c \in [0, 3]$ znaleźć pole przekroju zbioru A płaszczyzną $z = c$.
- (2 p.) Dla każdej liczby $c \in [0, 3]$ znaleźć środek ciężkości przekroju zbioru A płaszczyzną $z = c$ zakładając, że ten przekrój jest jednorodny.
- (4 p.) Znaleźć wszystkie trzy współrzędne środka ciężkości zbioru A zakładając, że jest on jednorodny.