

Rozwiązania różnych zadań należy napisać na różnych kartkach, bo sprawdzą je różne osoby. Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU imieniem i nazwiskiem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia. **Nie wolno korzystać z urządzeń elektronicznych (kalkulatorów, telefonów komórkowych itp.); posiadane muszą być schowane i wyłączone!** Nie dotyczy rozruszników serca. *Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!*

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały udowodnione na wykładzie lub na ćwiczeniach.

Należy przeczytać **CAŁE** zadanie **PRZED** rozpoczęciem rozwiązywania go!

1. (3 p.) Niech  $f(x, y) = (x^2 + y^2 - 25)(4x - 3y)$ . Wiadomo, że  
 $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x(4x - 3y) + 4(x^2 + y^2 - 25)$  i  $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y(4x - 3y) - 3(x^2 + y^2 - 25)$ .  
 (2 p.) Znaleźć punkty zerowania się gradientu funkcji  $f$ .  
 (2 p.) Znaleźć lokalne ekstrema funkcji  $f$ .  
 (3 p.) Znaleźć największą i najmniejszą wartość funkcji  $f$  w kole  $\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ .  
 (3 p.) Znaleźć największą i najmniejszą wartość funkcji  $f$  w kole  $\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 25\}$ .

2. (7 p.) Znaleźć wszystkie takie liczby zespolone  $z$ , że  $z^{10} + 4z^6 + 64z^4 + 256 = 0$ .  
 (3 p.) Zaznaczyć wszystkie znalezione w poprzednim punkcie liczby na płaszczyźnie.

3. (3 p.) Rozwiązać równanie  $x''(t) - 4x'(t) + 13x(t) = 0$ .  
 (7 p.) Rozwiązać równanie  $x''(t) - 4x'(t) + 13x(t) = 9e^{2t} + 40\sin(3t) + 6e^{2t}\sin(3t)$ .

4. (10 p.) Pojemnik zawiera 400 litrów wody, w której rozpuszczono 25 kg soli kuchennej. Do pojemnika wlewana jest woda w tempie 12 litrów na minutę, zawierająca  $\frac{1}{4}$  kg soli w każdym litrze. Jednocześnie przez otwór w dole pojemnika wypływa bardzo dokładnie wymieszana woda z solą z prędkością 8 litrów na minutę (więc w pojemniku jest coraz więcej płynu).  
 Ile soli znajdzie się w pojemniku, gdy objętość płynu równa będzie 500 l?  
 Ile soli znajdzie się w pojemniku, gdy objętość płynu równa będzie 800 l?

5. Znaleźć rozwiązanie ogólne układu równań

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) - 2y(t), \\ y'(t) = 8x(t) - 7y(t), \end{cases}$$

oraz rozwiązanie, które spełnia warunki  $x(0) = 4$  oraz  $y(0) = 0$

6. Niech  $A = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 2, 0 \leq x + y + z \leq 3\}$ .  
 (2 p.) Znaleźć objętość zbioru  $A$ . Narysować  $A$ .  
 (1 p.) Dla każdej liczby  $c \in [0, 2]$  znaleźć pole przekroju zbioru  $A$  płaszczyzną  $z = c$ .  
 (1 p.) Dla każdej liczby  $c \in [1, 2]$  znaleźć środek ciężkości przekroju zbioru  $A$  płaszczyzną  $z = c$  zakładając, że ten przekrój jest jednorodny.  
 (2 p.) Dla każdej liczby  $c \in [0, 1]$  znaleźć środek ciężkości przekroju zbioru  $A$  płaszczyzną  $z = c$  zakładając, że ten przekrój jest jednorodny.  
 (4 p.) Znaleźć wszystkie trzy współrzędne środka ciężkości zbioru  $A$  zakładając, że jest on jednorodny.