Matematyka A — kolokwium
27 maja 2015, godz. 18:15 — 20:10

Rozwiązania różnych zadań należy napisać na różnych kartkach, bo sprawdzą je różne osoby. Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU imieniem i nazwiskiem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia.
Nie wolno korzystać z urządzeń elektronicznych (kalkulatorów, telefonów komórkowych itp.); posiadane muszą być schowane i wyłączone! Nie dotyczy rozruszników serca.
Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!
Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały *udowodnione* na wykładzie lub na ćwiczeniach.

Należy przeczytać **CAŁE** zadanie **PRZED** rozpoczęciem rozwiązywania go!

---

1. **(3 p.)** Rozwiązać równanie różniczkowe $x''(t) - x'(t) - 12x(t) = 0$.

(7 p.) Rozwiązać równanie różniczkowe

$$x''(t) - x'(t) - 12x(t) = -\tfrac{1}{6} + 12t^2 - 150\cos(3t) + 36te^{3t} - 7e^{-3t}.$$

---

2. **(3 p.)** Rozwiązać równanie różniczkowe $x''(t) + 8x'(t) + 16x(t) = 0$.

(7 p.) Rozwiązać równanie różniczkowe

$$x''(t) + 8x'(t) + 16x(t) = 256e^{-4t} + 256\sin(4t) + 256te^{4t} + 400e^{4t}\cos(4t).$$

---

3. **(3 p.)** Rozwiązać równanie różniczkowe $x''(t) - 4x'(t) + 5x(t) = 0$.

(7 p.) Rozwiązać równanie różniczkowe

$$x''(t) - 4x'(t) + 5x(t) = 25t^2 - 4t\cos t + (12t-10)\sin t + e^{2t}(2+t^2) + 2e^{2t}\cos t.$$

---

4. **(10 p.)** Pojemnik zawiera 400 litrów wody, w której rozpuszczono 25 kg soli kuchennej. Do pojemnika wlewana jest woda w tempie 12 litrów na minutę, zawierająca $\frac{1}{4}$ kg soli w każdym litrze. Jednocześnie przez otwór w dole pojemnika wypływa bardzo dokładnie wymieszana woda z solą z prędkością 8 litrów na minutę (więc w pojemniku jest coraz więcej płynu).

Ile soli znajdzie się w pojemniku, gdy objętość płynu równa będzie 500 l?

Ile soli znajdzie się w pojemniku, gdy objętość płynu równa będzie 800 l?

---

5. Niech $M = \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} x_4 \\ y_4 \end{pmatrix}$.

(4 p.) Znaleźć taki niezerowy wektor $\mathbf{v}_1$, że $M \cdot \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1$ i $x_1, y_1 \in \{0,1,2,3,4,5\}$ lub wykazać to równanie jest spełnione jedynie przez wektor zerowy. Rozwiązać ten sam problem dla równań $M \cdot \mathbf{v}_2 = 2\mathbf{v}_2$, $M \cdot \mathbf{v}_3 = 3\mathbf{v}_3$, $M \cdot \mathbf{v}_4 = 4\mathbf{v}_4$.

(2 p.) Znaleźć $M^5 \cdot \binom{1}{1}$ oraz $M^5 \cdot \binom{2}{0}$.

(4 p.) Wykazać, że jedynym takim wektorem $\mathbf{v} = \binom{x}{y}$, że $M^{20150527} \cdot \mathbf{v} = \binom{0}{0}$ jest wektor zerowy.

Ciekawostki: $2^6 = 64$, $2^8 = 256$, $4^5 = 2^{10} = 1024$; $3^5 = 243$; punkty $(0,0)$, $(1,1)$, $(5,3)$ nie leżą na jednej prostej.