Matematyka A — kolokwium, 27 maja 2015, godz. 18:15— 20:10

Poprawiłem: godz 20:15, 14 września 2015 r.

1. (3 p.) Rozwiązać równanie różniczkowe $x''(t) - x'(t) - 12x(t) = 0$.

(7 p.) Rozwiązać równanie różniczkowe

$$x''(t) - x'(t) - 12x(t) = -\tfrac{1}{6} + 12t^2 - 150\cos(3t) + 36te^{3t} - 7e^{-3t}.$$

Rozwiązanie. Pierwiastkami równania charakterystycznego $0 = \lambda^2 - \lambda - 12 = (\lambda+3)(\lambda-4)$ są liczby -3 i 4. Wobec tego rozwiązaniem ogólnym równania $x''(t) - x'(t) - 12x(t) = 0$ jest funkcja $c_1e^{-3t} + c_2e^{4t}$, c_1, c_2 — dowolne liczby.

Ponieważ 0 nie jest pierwiastkiem równania charakterystycznego, więc istnieją takie liczby a, b, c, że funkcja kwadratowa $at^2 + bt + c$ jest rozwiązaniem równania $x''(t) - x'(t) - 12x(t) = -\frac{1}{6} + 12t^2$. Podstawiając $x(t) = at^2 + bt + c$ otrzymujemy

$-\frac{1}{6} + 12t^2 = (at^2+bt+c)'' - (at^2+bt+c)' - 12(at^2+bt+c) = 2a - (2at+b) - 12(at^2+bt+c) =$ $= -12at^2 + (-2a - 12b)t + (2a - b - 12c)$. Stąd wynika, że $a = -1$, $b = -\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ oraz $c = \frac{1}{12}(\frac{1}{6} + 2a - b) = \frac{1}{12}(\frac{1}{6} - 2 - \frac{1}{6}) = -\frac{1}{6}$. Wobec tego rozwiązaniem szczególnym (jednym z wielu) równania $x''(t) - x'(t) - 12x(t) = -\frac{1}{6} + 12t^2$ jest funkcja $x_1(t) = -t^2 + \frac{1}{6}t - \frac{1}{6}$.

Liczba $3i$ nie jest pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego, więc istnieją takie liczby a, b, że funkcja $a\cos(3t) + b\sin(3t)$ jest rozwiązaniem równania $-150\cos(3t) = x''(t) - x'(t) - 12x(t)$. Podstawiając $x(t) = a\cos(3t) + b\sin(3t)$ otrzymujemy

$-150\cos(3t) = (a\cos(3t) + b\sin(3t))'' - (a\cos(3t) + b\sin(3t))' - 12(a\cos(3t) + b\sin(3t)) =$ $= (-21a - 3b)\cos(3t) + (3a - 21b)\sin(3t)$. Stąd wynika, że $3a - 21b = 0$, czyli $a = 7b$ oraz $150 = 21a + 3b = 150b$, zatem $b = 1$ i wobec tego $a = 7$. Rozwiązaniem szczególnym (jednym z wielu) równania $x''(t) - x'(t) - 12x(t) = -150\cos(3t)$ jest funkcja $x_2(t) = 7\cos(3t) + \sin(3t)$.

Liczba 3 nie jest pierwiastkiem równania charakterystycznego. Wynika stąd, że równanie $x''(t) - x'(t) - 12x(t) = 36te^{3t}$ ma rozwiązanie postaci $(at+b)e^{3t}$. Podstawiając $x(t) = (at+b)e^{3t}$ otrzymujemy $36te^{3t} = \big((at+b)e^{3t}\big)'' - \big((at+b)e^{3t}\big)' - 12(at+b)e^{3t} =$ $= e^{3t}e^{3t}\big(6a + 9at + 9b - (a + 3at + 3b)\big) - 12(at+b)e^{3t} = (-6at + 5a - 6b)e^{3t}$. Stąd wnioskujemy, że $a = -6$ oraz $b = -5$. Wobec tego rozwiązaniem szczególnym (jednym z wielu) równania $x''(t) - x'(t) - 12x(t) = 36te^{3t}$ jest funkcja $x_3(t) = (-6t-5)e^{3t}$.

Liczba -3 jest pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego, zatem (zwiększamy stopień!) równanie $x''(t) - x'(t) - 12x(t) = -7te^{-3t}$ ma rozwiązanie postaci ate^{-3t}. Podstawiając $x(t) = ate^{-3t}$ otrzymujemy $-7te^{-3t} = x''(t) - x'(t) - 12x(t) = \big(x'(t) + 3x(t)\big)' - 4\big(x'(t) + 3x(t)\big) =$ $= \big(ae^{-3t} - 3ate^{-3t} + 3ate^{-3t}\big)' - 4\big(ae^{-3t} - 3ate^{-3t} + 3ate^{-3t}\big) = \big(ae^{-3t}\big)' - 4ae^{-3t} = -7ae^{-3t}$, więc $a = 1$. Wynika stąd, że rozwiązaniem szczególnym (jednym z wielu) równania $x''(t) - x'(t) - 12x(t) = -7te^{-3t}$ jest funkcja $x_4(t) = te^{-3t}$.

Z tych wszystkich rozważań wynika, że rozwiązaniem ogólnym równania

$$x''(t) - x'(t) - 12x(t) = -\tfrac{1}{6} + 12t^2 - 150\cos(3t) + 36te^{3t} - 7e^{-3t}$$

jest funkcja

$x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) + x_4(t) + c_1e^{-3t} + c_2e^{4t} =$

$$= -t^2 + \tfrac{1}{6}t - \tfrac{1}{6} + 7\cos(3t) + \sin(3t) + (-6t-5)e^{3t} + te^{-3t} + c_1e^{-3t} + c_2e^{4t}.$$

2. **(3 p.)** Rozwiązać równanie różniczkowe $x''(t) + 8x'(t) + 16x(t) = 0$.

(7 p.) Rozwiązać równanie różniczkowe

$$x''(t) + 8x'(t) + 16x(t) = 256e^{-4t} + 256\sin(4t) + 256te^{4t} + 400e^{4t}\cos(4t).$$

Rozwiązanie. Równanie charakterystyczne wygląda tak: $0 = \lambda^2 + 8\lambda + 16 = (\lambda + 4)^2$, więc ma ono jeden pierwiastek, za to podwójny. Jest nim liczba -4. Rozwiązanie ogólne równanie jednorodnego: $x''(t) + 8x'(t) + 16x(t) = 0$ ma więc postać $(c_1 + c_2t)e^{-4t}$.

Wobec tego równanie $x''(t) + 8x'(t) + 16x(t) = 256e^{-4t}$ ma rozwiązanie postaci at^2e^{-4t}. Podstawiając $x(t) = at^2e^{-4t}$ do tego równania otrzymujemy $256e^{-4t} = x''(t) + 8x'(t) + 16x(t) =$ $=\big(x'(t) + 4x(t)\big)' + 4\big(x'(t) + 4x(t)\big) = \big((at^2e^{-4t})' + 4at^2e^{-4t}\big)' + 4\big((at^2e^{-4t})' + 4at^2e^{-4t}\big) =$ $= \big(2ate^{-4t} - 4at^2e^{-4t} + 4at^2e^{-4t}\big)' + 4\big(2ate^{-4t} - 4at^2e^{-4t} + 4at^2e^{-4t}\big) = \big(2ate^{-4t}\big)' + 4\cdot 2ate^{-4t} =$ $= 2ae^{-4t} - 8ate^{-4t} + 8ate^{-4t} = 2ae^{-4t}$. Stąd wynika, że $a = \frac{256}{2} = 128$. Wobec tego funkcja $x_1(t) = 128t^2e^{-4t}$ jest rozwiązaniem szczególnym (jednym z nieskończenie wielu) równania $256e^{-4t} = x''(t) + 8x'(t) + 16x(t)$.

Ponieważ liczba $4i$ nie jest pierwiastkiem równania charakterystycznego, więc istnieje taka liczba a, że funkcja ae^{4it} jest rozwiązaniem równania $x''(t) + 8x'(t) + 16x(t) = 256e^{4it}$. Podstawiając $x(t) = ae^{4it}$ otrzymujemy $256e^{4it} = 16i^2ae^{4it} + 32iae^{4it} + 16ae^{4it} = 32iae^{4it}$, zatem $a = \frac{256}{32i} = -8i$. Wobec tego funkcja $-8ie^{4it}$ jest rozwiązaniem równania $x''(t)+8x'(t)+16x(t) = 256e^{4it}$. Ponieważ $256\sin(4t) = 256\mathrm{Im}(e^{4it})$, więc rozwiązaniem szczególnym (jednym z nieskończenie wielu) równania $x''(t) + 8x'(t) + 16x(t) = 256\sin(4t)$ jest funkcja $x_2(t) = \mathrm{Im}(-8ie^{4it}) =$ $=\mathrm{Im}(-8i\cos(4t) + 8\sin(4t)) = -8\cos(4t)$.

Liczba 4 nie jest pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego, wiec istnieją takie liczby a, b, że funkcja $(at + b)e^{4t}$ jest rozwiązaniem równania $x''(t) + 8x'(t) + 16x(t) = 256te^{4t}$. Podstawiając w tym równaniu $x(t) = (at + b)e^{4t}$ otrzymujemy $256te^{4t} = x''(t) + 8x'(t) + 16x(t) =$ $=\big((at + b)e^{4t}\big)'' + 8\big((at + b)e^{4t}\big)' + 16\big((at + b)e^{4t}\big) = \big((8a + 16at + 16b)e^{4t}\big) + 8\big((a + 4at + 4b)e^{4t}\big) + +16\big((at + b)e^{4t}\big) = (64at + 16a + 64b)e^{4t}$. Stąd wynika, że $a = \frac{256}{64} = 4$ i wobec tego $b = -\frac{16\cdot 4}{64} = -1$. Udowodniliśmy, że funkcja $x_3(t) = (4t - 1)e^{4t}$ jest rozwiązaniem szczególnym (jednym z wielu) równania $x''(t) + 8x'(t) + 16x(t) = 256te^{4t}$.

Liczba $4 + 4i$ nie jest pierwiastkiem równania charakterystycznego, więc istnieje taka liczba zespolona a, że funkcja $ae^{(4+4i)t}$ jest rozwiązaniem równania $x''(t) + 8x'(t) + 16x(t) = 400e^{(4+4i)t}$. Podstawiając $x(t) = ae^{(4+4i)t}$ w tym równaniu otrzymujemy $400e^{(4+4i)t} = (4 + 4i)^2ae^{(4+4i)t} + 8(4 + 4i)ae^{(4+4i)t} + 16ae^{(4+4i)t} = (16 + 32i - 16 + 32 + 32i + 16)ae^{(4+4i)t} = (48 + 64i)ae^{(4+4i)t}$. Stąd wnioskujemy, że $a = \frac{400}{48+64i} = \frac{25}{3+4i} = \frac{25(3-4i)}{9+16} = 3 - 4i$. Wobec tego funkcja $(3 - 4i)e^{(4+4i)t}$ jest rozwiązaniem równania $x''(t) + 8x'(t) + 16x(t) = 400e^{(4+4i)t}$. Prawdziwy jest też wzór $400e^{4t}\cos(4t) = \mathrm{Re}(400e^{(4+4i)t})$, zatem rozwiązaniem szczególnym (jednym z wielu) równania $x''(t) + 8x'(t) + 16x(t) = 400e^{4t}\cos(4t)$ jest funkcja $x_4(t) = \mathrm{Re}((3 - 4i)e^{(4+4i)t}) = e^{4t}\big(3\cos(4t) + +4\sin(4t)\big)$. Z tych przydługich rozważań wnioskujemy, że rozwiązaniem ogólnym równania $x''(t) + 8x'(t) + 16x(t) = 256e^{-4t} + 256\sin(4t) + 256te^{4t} + 400e^{4t}\cos(4t)$ jest funkcja

$x(t) = x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) + x_4(t) + (c_1 + c_2t)e^{-4t} =$

$$128t^2e^{-4t} - 8\cos(4t) + (4t - 1)e^{4t} + e^{4t}\big(3\cos(4t) + +4\sin(4t)\big) + (c_1 + c_2t)e^{-4t}$$

3. **(3 p.)** Rozwiązać równanie różniczkowe $x''(t) - 4x'(t) + 5x(t) = 0$.

(7 p.) Rozwiązać równanie różniczkowe

$x''(t) - 4x'(t) + 5x(t) = 25t^2 - 4t\cos t + (12t-10)\sin t + e^{2t}(2+t^2) + 2e^{2t}\cos t$.

Rozwiązanie. Równanie charakterystyczne wygląda tak $0 = \lambda^2 - 4\lambda + 5 = (\lambda-2)^2 + 1$, więc jego pierwiastkami są liczby $2 \pm i$. Wobec tego rozwiązaniem ogólnym równania jednorodnego jest funkcja $\hat{c}_1 e^{(2-i)t} + \hat{c}_2 e^{(2+i)t} = (\hat{c}_1 + \hat{c}_2)e^{2t}\cos t + i(-\hat{c}_1 + \hat{c}_2)e^{2t}\sin t = e^{2t}(c_1\cos t + c_2 \sin t)$.

Ponieważ liczba 0 nie jest pierwiastkiem równania charakterystycznego, więc równanie $x''(t) - 4x'(t) + 5x(t) = 25t^2$ ma rozwiązanie postaci $at^2 + bt + c$. Podstawiając w nim $x(t) = at^2 + bt + c$ otrzymujemy $25t^2 = 2a - 4(2at+b) + 5(at^2+bt+c) = 5at^2 + (-8a+5b)t + 2a - 4b + 5c$. Stąd wynika, że $a = \frac{25}{5} = 5$, $b = \frac{2a}{5} = 8$ i $c = \frac{-2a+4b}{5} = -\frac{22}{5}$, zatem rozwiązaniem szczególnym (jednym z wielu) równania $x''(t) - 4x'(t) + 5x(t) = 25t^2$ jest funkcja $x_1(t) = 5t^2 - 2t - 4{,}4$.

Ponieważ liczba i nie jest pierwiastkiem równania charakterystycznego, więc równanie $x''(t) - 4x'(t) + 5x(t) = -4t\cos t + (12t-10)\sin t$ ma rozwiązanie postaci $(at+b)\cos t + (ct+d)\sin t$. Przyjmując $x(t) = (at+b)\cos t + (ct+d)\sin t$ otrzymujemy $-4t\cos t + (12t-10)\sin t = \big((at+b)\cos t + (ct+d)\sin t\big)'' - 4\big((at+b)\cos t + (ct+d)\sin t\big)' + 5\big((at+b)\cos t + (ct+d)\sin t\big) = \big(-2a\sin t - (at+b)\cos t + 2c\cos t - (ct+d)\sin t\big) - 4\big(a\cos t - (at+b)\sin t + c\sin t + (ct+d)\cos t\big) + 5\big((at+b)\cos t + (ct+d)\sin t\big) = (-at - b + 2c - 4a - 4ct - 4d + 5at + 5b)\cos t + (-2a - ct - d + 4at + 4b - 4c + 5ct + 5d)\sin t = \big(4(a-c)t - 4a + 4b + 2c - 4d\big)\cos t + \big(4(a+c)t - 2a + 4b - 4c + 4d\big)\sin t$. Wynika z otrzymanej równości, że $4(a-c) = -4$ i $4(a+c) = 12$, więc $a = 1$ i $c = 2$, a stąd $4b - 4d = 0$ i $4b + 4d = 0$, więc $b = d = 0$. Wykazaliśmy, że rozwiązaniem szczególnym równania $x''(t) - 4x'(t) + 5x(t) = -4t\cos t + (12t-10)\sin t$ jest funkcja $x_2(t) = \cos t + 2\sin t$ (są też inne).

Ponieważ liczba 2 nie jest pierwiastkiem równania charakterystycznego, więc równanie $x''(t) - 4x'(t) + 5x(t) = e^{2t}(2+t^2)$ ma rozwiązanie postaci $(at^2+bt+c)e^{2t}$. Przyjmując $x(t) = (at^2+bt+c)e^{2t}$ otrzymujemy $e^{2t}(2+t^2) = x''(t) - 4x'(t) + 5x(t) = \big(2a + 4(2at+b) + 4(at^2+bt+c)\big)e^{2t} - 4\big((2at+b) + 2(at^2+bt+c)\big)e^{2t} + 5(at^2+bt+c)e^{2t} = (at^2 + bt + 2a + c)e^{2t}$. Stąd od razu wynika, że $a = 1$, $b = c = 0$. Wobec tego funkcja $x_3(t) = t^2e^{2t}$ jest rozwiązaniem szczególnym (jednym z nieskończenie wielu) równania $x''(t) - 4x'(t) + 5x(t) = e^{2t}(2+t^2)$

Liczba $2+i$ jest pierwiastkiem równania charakterystycznego, wobec czego równanie $x''(t) - 4x'(t) + 5x(t) = 2e^{2t}\cos t$ ma rozwiązanie postaci $ate^{2t}\cos t + bte^{2t}\sin t$ (podnosimy stopień o 1). Zamiast tego równania rozpatrzymy równanie $x''(t) - 4x'(t) + 5x(t) = 2e^{(2+i)t}$. Ma ono, z tego samego powodu, rozwiązanie postaci $Ate^{(2+i)t}$. Zastępując w nim $x(t)$ przez $Ate^{(2+i)t}$ otrzymujemy $A\big(2(2+i) + (2+i)^2t\big)e^{(2+i)t} - 4A\big(1 + (2+i)t\big)e^{(2+i)t} + 5Ate^{(2+i)t} = 2e^{(2+i)t}$, czyli $2Aie^{(2+i)t} = 2e^{(2+i)t}$. Wynika stąd, że $A = -i$. Rozwiązaniem szczególnym jest więc funkcja $-ite^{(2+i)t} = e^{2t}(-i\cos t + \sin t)$. Ponieważ $\mathrm{Re}(e^{(2+i)t}) = e^{2t}\cos t$, więc rozwiązaniem szczególnym równania $x''(t) - 4x'(t) + 5x(t) = 2e^{2t}\cos t$ jest funkcja $x_4(t) = \mathrm{Re}(-ite^{(2+i)t}) = e^{2t}\sin t$.

Rozwiązanie równania $x''(t) - 4x'(t) + 5x(t) = 25t^2 - 4t\cos t + (12t-10)\sin t + e^{2t}(2+t^2) + 2e^{2t}\cos t$ to $5t^2 - 2t - 4{,}4 + \cos t + 2\sin t + t^2e^{2t} + 2e^{2t}\cos t + e^{2t}(c_1\cos t + c_2\sin t)$, ogólne oczywiście.

4. (10 p.) Pojemnik zawiera 400 litrów wody, w której rozpuszczono 25 kg soli kuchennej. Do pojemnika wlewana jest woda w tempie 12 litrów na minutę, zawierająca $\frac{1}{4}$ kg soli w każdym litrze. Jednocześnie przez otwór w dole pojemnika wypływa bardzo dokładnie wymieszana woda z solą z prędkością 8 litrów na minutę (więc w pojemniku jest coraz więcej płynu).
Ile soli znajdzie się w pojemniku, gdy objętość płynu równa będzie 500 l?
Ile soli znajdzie się w pojemniku, gdy objętość płynu równa będzie 800 l?

Rozwiązanie. Niech $V(t)$ oznacza ilość płynu w pojemniku w chwili t. Mamy, jak można łatwo zauważyć, $V(t) = 400 + t(12 - 8) = 400 + 4t$. Niech $x(t)$ oznacza ilość soli w roztworze w chwili t. Jeśli Δt jest małą liczbą, to $x(t + \Delta t) \approx x(t) + 0{,}25 \cdot 12 \cdot \Delta t - \frac{x(t)}{V(t)} \cdot 8 \cdot \Delta t = x(t) - \frac{x(t)}{400+4t} \cdot 8 \cdot \Delta t + 3\Delta t$. Równość jest tylko przybliżona, bo zawartość soli w roztworze zmienia się ciągle, a założyliśmy, że w okresie od t do $t + \Delta t$ stale jest $x(t)$ soli w roztworze. Dokładną równość uzyskujemy obliczając granicę przy $\Delta t \longrightarrow 0$. Trzeba jednak najpierw podzielić te równość przez Δt. Otrzymujemy $x'(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = -\frac{2x(t)}{100+t} + 3$. Stąd wynika równość $(100+t)^2 x'(t) + 2(100+t)x(t) = 3(100+t)^2$, zatem $\big((100+t)^2 x(t)\big)' = 3(100+t)^2$. Stąd wynika natychmiast, że $(100+t)^2 x(t) = (100+t)^3 + C$ dla pewnej stałej C, więc $x(t) = 100 + t + \frac{C}{(100+t)^2}$. Ponieważ $x(0) = 25$, więc $25 = 100 + \frac{C}{10\,000}$, czyli $C = -750\,000$, zatem $x(t) = 100 + t - \frac{750\,000}{(100+t)^2}$. Gdy $V(t) = 500 = 400 + 4t$, to $t = 25$. Mamy $x(25) = 125 - \frac{750\,000}{(125)^2} = 125 - 48 = 77$. Jeśli $V(t) = 800$, to $t = 100$. Wtedy $x(100) = 200 - \frac{750\,000}{200^2} = 200 - \frac{75}{4} = 200 - 18 - \frac{3}{4} = 181\frac{1}{4}$, oczywiście kilogramów.

5. Niech $M = \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} x_4 \\ y_4 \end{pmatrix}$.

(4 p.) Znaleźć taki niezerowy wektor $\mathbf{v}_1$, że $M \cdot \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1$ i $x_1, y_1 \in \{0,1,2,3,4,5\}$ lub wykazać to równanie jest spełnione jedynie przez wektor zerowy. Rozwiązać ten sam problem dla równań $M \cdot \mathbf{v}_2 = 2\mathbf{v}_2$, $M \cdot \mathbf{v}_3 = 3\mathbf{v}_3$, $M \cdot \mathbf{v}_4 = 4\mathbf{v}_4$.

(2 p.) Znaleźć $M^5 \cdot \binom{1}{1}$ oraz $M^5 \cdot \binom{2}{0}$.

(4 p.) Wykazać, że jedynym takim wektorem $\mathbf{v} = \binom{x}{y}$, że $M^{20150527} \cdot \mathbf{v} = \binom{0}{0}$ jest wektor zerowy.

Rozwiązanie. Szukamy takiego wektora $\mathbf{v}_1$, że $M\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1$, czyli muszą być spełnione obie równości $7x_1 - 5y_1 = x_1$, $3x_1 - y_1 = y_1$. Wynika z nich, że $6x_1 = 5y_1$ i $3x_1 = 2y_1$, zatem $5y_1 = 6x_1 = 2(3x_1) = 4y_1$, więc $y_1 = 0$ i wobec tego $x_1 = 0$.

Teraz szukamy wektora $\mathbf{v}_2$. muszą być spełnione obie równości $7x_2 - 5y_2 = 2x_2$, $3x_2 - y_2 = 2y_2$. Wynika z nich, że $x_2 = y_2$. Przykładem takiego wektora jest $\mathbf{v}_2 = \binom{1}{1}$.

Kolej na $\mathbf{v}_3$. Ma być $7x_3 - 5y_3 = 3x_3$ i $3x_3 - y_3 = 3y_3$, czyli $4x_3 = 5y_3$ i $3x_3 = 4y_3$, więc również $16x_3 = 4(5y_3) = 5(4y_3) = 15x_3$, więc $x_3 = 0$, wobec czego również $y_3 = 0$.

I ostatnia część tych rozważań. Każde z równań $7x_4 - 5y_4 = 4x_4$ i $3x_4 - y_4 = 4y_4$ jest równoważne równaniu $3x_4 = 5y_4$, więc można przyjąć $x_4 = 5$ i $y_4 = 3$.

Mamy $M\mathbf{v}_2 = M\binom{1}{1} = 2\binom{1}{1}$. Następnie $M^2\binom{1}{1} = M \cdot 2\binom{1}{1} = 2M\binom{1}{1} = 2^2\binom{1}{1}$. Kontynuując to postępowanie otrzymujemy $M^5\binom{1}{1} = 2^5\binom{1}{1} = \binom{32}{32}$.

Łatwo stwierdzamy, że $\binom{2}{0} = \binom{5}{3} - 3\binom{1}{1}$, zatem $M\binom{2}{0} = 4\binom{5}{3} - 3 \cdot 2\binom{1}{1}$. Podobnie jak poprzednio otrzymujemy wzór $M^2\binom{2}{0} = 4M\binom{5}{3} - 3 \cdot 2M\binom{1}{1} = 4^2\binom{5}{3} - 3 \cdot 2^2\binom{1}{1}$. Po następnych trzech takich operacjach mamy $M^5\binom{2}{0} = 4^5\binom{5}{3} - 3 \cdot 2^5\binom{1}{1} = 1024\binom{5}{3} - 96\binom{1}{1} = \binom{5024}{2976}$.

Wyznacznik iloczynu macierzy jest równy iloczynowi ich wyznaczników, więc zachodzi równość $\det(M^{20150527}) = (7 \cdot (-1) - (-5) \cdot 3)^{20150527} = 8^{20150527} \neq 0$. Macierz $M^{20150527}$ ma więc macierz odwrotną, zatem z równości $M^{20150527}\mathbf{v} = \binom{0}{0}$ wynika równość $\mathbf{v} = (M^{20150527})^{-1}\binom{0}{0} = \binom{0}{0}$.

Ostatnią część rozumowania można zastąpić nieco innym rozumowaniem. Dla każdego wektora $\binom{x}{y}$ istnieje dokładnie jedna para takich liczb c, d, że $\binom{x}{y} = c\binom{1}{1} + d\binom{5}{3}$. Jeśli $M\binom{x}{y} = \binom{0}{0}$, to $\binom{0}{0} = M^{20150527}\binom{x}{y} = 2^{20150527} \cdot c \cdot \binom{1}{1} + 4^{20150527} \cdot d \cdot \binom{5}{3}$, ale stąd wynika, że $c \cdot 2^{20150527} = 0 = d \cdot 4^{20150527}$, a to oznacza, że $c = 0 = d$. Stąd $x = 0 = y$.

Ciekawostki: $2^6 = 64$, $2^8 = 256$, $4^5 = 2^{10} = 1024$; $3^5 = 243$; punkty $(0,0)$, $(1,1)$, $(5,3)$ nie leżą na jednej prostej.