

Matematyka A — kolokwium
29 kwietnia 2015, godz. 18:15 — 20:10

Rozwiązania różnych zadań należy napisać na różnych kartkach, bo sprawdzą je różne osoby. Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU imieniem i nazwiskiem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia. **Nie wolno korzystać z urządzeń elektronicznych (kalkulatorów, telefonów komórkowych itp.); posiadane muszą być schowane i wyłączone!** Nie dotyczy rozruszników serca. *Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!*

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały udowodnione na wykładzie lub na ćwiczeniach.

Należy przeczytać **CAŁE** zadanie **PRZED** rozpoczęciem rozwiązywania go!

1. (5 p.) Obliczyć objętość bryły powstałej w wyniku obrotu o kąt 2π obszaru

$$\{(x, y): 0 \leq y \leq 5x^2, 0 \leq x \leq 2\} \text{ wokół osi } OX.$$

- (5 p.) Obliczyć objętość bryły powstałej w wyniku obrotu o kąt 2π obszaru

$$\{(x, y): x^2 \leq y \leq 20, 0 \leq x \leq 2\} \text{ wokół osi } OY.$$

2. (10 p.) Niech $f(x) = (1 - x^{2/3})^{3/2}$ dla $0 \leq x \leq 1$. Obliczyć pole powierzchni powstałej w wyniku obrotu wykresu funkcji f o kąt 2π wokół osi OX .
-

3. (7 p.) Rozwiązać równanie różniczkowe $x'(t) = \frac{tx(t)}{\sqrt{1+t^2}}$.

- (3 p.) Znaleźć rozwiązanie równania $x'(t) = \frac{tx(t)}{\sqrt{1+t^2}}$, dla którego $x(0) = -7$.
-

4. (10 p.) Niech $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2} \ln x - \frac{1}{4} \ln(1+x^2)$ dla $1 \leq x \leq 4$. Obliczyć długość wykresu funkcji f .
-

5. Niech $A = \{(x, y, z): 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 2, 0 \leq x + y + z \leq 3\}$.

- (2 p.) Znaleźć objętość zbioru A . Narysować A .

- (1 p.) Dla każdej liczby $c \in [0, 2]$ znaleźć pole przekroju zbioru A płaszczyzną $z = c$.

- (1 p.) Dla każdej liczby $c \in [1, 2]$ znaleźć środek ciężkości przekroju zbioru A płaszczyzną $z = c$ zakładając, że ten przekrój jest jednorodny.

- (2 p.) Dla każdej liczby $c \in [0, 1]$ znaleźć środek ciężkości przekroju zbioru A płaszczyzną $z = c$ zakładając, że ten przekrój jest jednorodny.

- (2 p.) Znaleźć dwie pierwsze współrzędne środka ciężkości zbioru A zakładając, że zbiór A jest jednorodny.

- (2 p.) Znaleźć trzecią współrzędną środka ciężkości zbioru A zakładając, że zbiór A jest jednorodny.
-

Ciekawostki: $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$, $11 = 2 + 3^2$, jeśli C, D są podzbiórmi płaszczyzny traktowanymi jako jednorodne ciała o polach m_C, m_D przy czym pole zbioru $C \cap D$ jest zerem, to $c_{A \cup B} = \frac{m_C C + m_D D}{m_C + m_D}$, gdzie m_C, m_D i $c_{A \cup B}$ oznaczają środki ciężkości zbiorów C, D i $C \cup D$.