Matematyka A, egzamin, 5 lutego 2015, 10:05 – 13:05

Rozwiązania kolejnych zadań należy pisać na różnych kartkach, bo sprawdzać je będą różne osoby. Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU imieniem i nazwiskiem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia.

Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, musi wyłączyć i schować! Nie dotyczy rozruszników serca.

Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały *udowodnione* na wykładzie lub na ćwiczeniach.

Należy przeczytać **CAŁE** zadanie **PRZED** rozpoczęciem rozwiązywania go!

---

1. 3 pt. Zdefiniować $\log_x a$ pamiętając o założeniach o a i x.

7 pt. Rozwiązać równanie $\frac{1}{3}\log_{10}(x+1)^3 + \frac{1}{5}\log_{10}(x-1)^5 = \log_{10}\frac{3}{7-x} + 1 - 2\log_{10}\frac{1}{\cos\frac{\pi}{4}}$.

---

2. 3 pt. Podać definicję kosinusa, sinusa i tangensa dowolnego kąta dodatniego.

4 pt. Rozwiązać nierówność $3\,\mathrm{tg}^2\, t + 3\,\mathrm{ctg}^2\, t > 10$.

3 pt. Zilustrować jej rozwiązanie na okręgu $x^2 + y^2 = 1$.

---

3. 10 pt. Na wykresie funkcji kwadratowej $y = \frac{1}{3}x^2$ znaleźć punkt (x_0, y_0), który leży najbliżej punktu $(-5, 7)$.

---

4. Niech $f(x) = \sqrt[3]{x^2(x+2)} \cdot (x-4)^{4/3}$. Dla $x \neq 0$ zachodzą wtedy równości:

$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-1/3}(x-4)^{1/3}(x+2)^{-2/3}(7x^2-16)$ oraz

$f''(x) = \frac{4}{9}x^{-4/3}(x-4)^{-2/3}(x+2)^{-5/3}(7x^4 - 62x^2 - 48x - 32)$.

$x_1 = -\frac{4}{\sqrt{7}} \approx -1{,}51$, $x_2 = \frac{4}{\sqrt{7}} \approx 1{,}51$, liczby $x_3 \approx -2{,}63$, $x_4 \approx 3{,}36$ są jedynymi pierwiastkami rzeczywistymi wielomianu $7x^4 - 62x^2 - 48x - 32$. Wiadomo, że $f^{(3)}(x_3) > 0$ i $f^{(3)}(x_4) > 0$

Napisać definicję stycznej do wykresu funkcji.

1 pt. Obliczyć $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ oraz $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

1 pt. Rozstrzygnąć, czy istnieje pochodna $f'(0)$. Jeśli istnieje, obliczyć.

2 pt. Znaleźć te przedziały, na których funkcja f maleje oraz te, na których rośnie.

2 pt. Znaleźć te przedziały, na których funkcja f jest wypukła oraz te, na których jest wklęsła.

4 pt. Naszkicować wykres funkcji f korzystając z uzyskanych informacji.

---

5. (10 pt.) Obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos(\mathrm{tg}(x))) \cdot ((1+3x)^{1/3} - (1+7x)^{1/7} - 2x\sin x) \cdot \cos(x^3)}{(e^{-x^2} - e^{x^2} + x\sin(2x)) \cdot ((1+x)^{23} - 1)}$.

---

6. Niech $A = (2,3,2)$, $A_1 = (3,5,4)$, $B = (14,7,5)$, $C_1 = (6,4,10)$, równoległoboki ABB_1A_1, $ABCD$, ADD_1A_1 są ścianami równoległościanu $ABCDA_1B_1C_1D_1$, odcinki AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 są równoległymi krawędziami tego równoległościanu.

2 pt. Znaleźć współrzędne wierzchołków B_1, C, D, D_1 równoległościanu $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

2 pt. Znaleźć pole trójkąta A_1B_1C.

2 pt. Znaleźć równanie płaszczyzny ABD.

2 pt. Znaleźć objętość pięciościanu $ABCDD_1A_1$ i odległość punktu A od płaszczyzny ABC.

2 pt. Znaleźć kosinus kąta $\alpha = \sphericalangle A_1AC_1$ i wykazać, że $\alpha > \frac{\pi}{6}$.

Ciekawostki (któż wie, co się może przydać): $(1+x)^a = 1 + ax + \binom{a}{2}x^2 + \binom{a}{3}x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n}x^n$,

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $\quad (\cos x)' = -\sin x$,

$\mathrm{tg}\, x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \cdots$. $\quad \ln(1-x) = -\left(x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \ldots\right)$,

$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \ldots$, $\quad 3^7 = 2187$, $\quad 2^4 \cdot 11^2 = 44^2 = 1936$.