Matematyka A, egzamin, 5 lutego 2015, 10:05 – 13:05

Rozwiązania kolejnych zadań należy pisać na różnych kartkach, bo sprawdzać je będą różne osoby. Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU imieniem i nazwiskiem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia.

Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, musi wyłączyć i schować! Nie dotyczy rozruszników serca.

Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały *udowodnione* na wykładzie lub na ćwiczeniach.

Należy przeczytać **CAŁE** zadanie **PRZED** rozpoczęciem rozwiązywania go!

---

1. 3 pt. Zdefiniować $\log_v u$ pamiętając o założeniach o u i v.

7 pt. Rozwiązać równanie $\log_{10}(x+2) + \frac{1}{5}\log_{10}(3-x)^5 + \log_{10} 0{,}25 = \frac{1}{\log_3 10} - 3\log_{10}\sqrt[3]{x+1}$.

---

2. 3 pt. Podać definicję kosinusa, sinusa i tangensa dowolnego kąta dodatniego.

4 pt. Rozwiązać nierówność $\operatorname{tg} t - \operatorname{ctg} t > \frac{2}{\sqrt{3}}$.

3 pt. Zilustrować jej rozwiązanie na okręgu $x^2 + y^2 = 1$.

---

3. 10 pt. Na wykresie funkcji kwadratowej $y = \frac{1}{3}x^2$ znaleźć punkt (x_0, y_0), który leży najbliżej punktu $\left(\frac{4}{3}, \frac{23}{6}\right)$.

---

4. Niech $f(x) = e^x \cdot \sqrt[3]{x^2} \cdot (x-1)^3 \cdot (x-3)$. Dla $x \neq 0$ zachodzą wtedy równości:

$f'(x) = \frac{1}{3}e^x(x-1)^2 x^{-1/3}(3x^3 + 2x^2 - 29x + 6)$ oraz

$f''(x) = \frac{1}{9}e^x x^{-4/3}(x-1)(9x^5 + 39x^4 - 95x^3 - 137x^2 + 70x + 6)$.

$3x^3 + 2x^2 - 29x + 6 = 0 \iff x = x_1 \approx -3{,}55$, $x = x_2 \approx 0{,}21$ lub $x = x_3 \approx 2{,}67$,

$9x^5 + 39x^4 - 95x^3 - 137x^2 + 70x + 6 = 0 \iff x = x_4 \approx -5{,}68$, $x = x_5 \approx -1{,}40$, $x = x_6 \approx \approx -0{,}08$, $x = x_7 \approx 0{,}48$ lub $x = x_8 \approx 2{,}34$.

1 pt. Obliczyć $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ oraz $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

1 pt. Rozstrzygnąć, czy istnieje pochodna $f'(0)$. Jeśli istnieje, obliczyć.

2 pt. Znaleźć te przedziały, na których funkcja f maleje oraz te, na których rośnie.

2 pt. Znaleźć te przedziały, na których funkcja f jest wypukła oraz te, na których jest wklęsła.

4 pt. Naszkicować wykres funkcji f korzystając z uzyskanych informacji.

---

5. (10 pt.) Obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos(\sin(x))) \cdot ((1+3x)^{1/3} - (1+5x)^{1/5} - x\operatorname{tg} x) \cdot \cos(x^5)}{(e^x - e^{-x} - \sin(2x)) \cdot ((1+x^2)^{10} - 1)}$.

---

6. Niech $A = (0,0,0)$, $B = (2,3,6)$, $D = (1,2,2)$, $C_1 = (3,4,12)$, równoległoboki ABB_1A_1, $ABCD$, ADD_1A_1 są ścianami równoległościanu $ABCDA_1B_1C_1D_1$, odcinki AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 są równoległymi krawędziami tego równoległościanu.

2 pt. Znaleźć współrzędne wierzchołków B_1, D_1, A_1 i C równoległościanu $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

2 pt. Znaleźć pole trójkąta A_1B_1C.

2 pt. Znaleźć równanie płaszczyzny A_1B_1D.

2 pt. Znaleźć objętość czworościanu AB_1CD_1.

2 pt. Znaleźć kosinus kąta α między wektorami AB i AD i wykazać, że $\alpha < \frac{\pi}{6}$.

Ciekawostki (któż wie, co się może przydać): $(1+x)^a = 1 + ax + \binom{a}{2}x^2 + \binom{a}{3}x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n}x^n$,

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $\quad (\cos x)' = -\sin x$,

$\operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \cdots$. $\quad \ln(1-x) = -\left(x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \dots\right)$.