Matematyka A, kolokwium, 7 stycznia 2014, 18:15 – 20:05

Rozwiązania różnych zadań mają znaleźć się na różnych kartkach, bo sprawdzać je będą różne osoby. Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU imieniem i nazwiskiem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia.

Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, musi wyłączyć i schować! Nie dotyczy rozruszników serca.

Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały *udowodnione* na wykładzie lub na ćwiczeniach.

Należy przeczytać **CAŁE** zadanie **PRZED** rozpoczęciem rozwiązywania go!

---

1. Obliczyć pochodne następujących funkcji:

a. (3 pt.) $\ln\big(\mathrm{tg}(3x)\big)$, **b. (4 pt.)** $\sqrt[3]{\frac{x^2+10x+26}{x+5}}$ **c. (3 pt).** $y = \big(7+\sin(5x)\big)^{1/(2x+3)}$.

---

2. (3 pt.) Podać definicję pochodnej funkcji f w punkcie 1.

(7 pt.) Obliczyć wartość $f(1)$ oraz pochodną $f'(1)$, jeśli

$$f(x) = \ln(1+2\,\mathrm{tg}(\pi x)) \cdot \sqrt{3+x} \cdot (3-x)^3 \cdot \log_{10}\Big(\big(1+2x+3x^2+4x^3\big)^5\Big).$$

---

3. Niech $f(x) = \sqrt{x^2+15}$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

(1 pt.) Znaleźć prostą T_P styczną do wykresu funkcji f w punkcie $P = (-1, 4)$.

(3 pt.) Znaleźć prostą T_Q styczną do wykresu funkcji f w punkcie $Q = \big(q, f(q)\big)$, $q \in \mathbb{R}$.

(6 pt.) Niech $F_g = \big(0, \sqrt{30}\big)$, $F_d = \big(0, -\sqrt{30}\big)$. Udowodnić, że kąt ostry między prostymi T_P i F_gP jest równy kątowi ostremu między prostymi T_P i F_dP.

---

4. Niech $f(x) = \sqrt[3]{2x^3-3x^2-12x-7}$ dla $x \in \mathbb{R}$.

(2 pt.) Obliczyć $f'(x)$ dla tych x, dla których ta pochodna istnieje, niezależnie od tego, czy jest ona skończona, czy nie.

(3 pt.) Ustalić, na jakich przedziałach funkcja f rośnie, a na jakich maleje.

(2 pt.) Dla jakich $a \in \mathbb{R}$ istnieje dokładnie jedna liczba x, dla której $f(x) = a$, dla jakich a istnieją dokładnie dwie takie liczby x, dla jakich a — dokładnie trzy takie liczby x, a dla jakich a takich liczb x jest jeszcze więcej więcej?

(3 pt.) Dowieść, że jeśli $7 \leqslant s < t$, to $t-s < f(t)-f(s) < 2(t-s)$

---

5. (10 pt.) W zbiorze złożonym z tych punktów (x, y), których współrzędne spełniają równanie $x^2-y^2 = 15$ i nierówność $x > 0$, znaleźć punkt najbliższym punktowi $\big(-\frac{32}{3}, \frac{14}{3}\big)$.
