Matematyka A, kolokwium, 7 stycznia 2014, 18:15 – 20:05

R O Z W I Ą Z A N I A

Mam nadzieję, że nie ma błędów, jeśli jednak ktoś znajdzie, proszę o wiadomość.

---

1. Obliczyć pochodne następujących funkcji:

a. (3 pt.) $\ln\big(\operatorname{tg}(3x)\big)$, **b. (4 pt.)** $\sqrt[3]{\frac{x^2+10x+26}{x+5}}$ **c. (3 pt).** $\big(7+\sin(5x)\big)^{1/(2x+3)}$.

Rozwiązanie. Mamy $\big(\ln\big(\operatorname{tg}(3x)\big)\big)' = \frac{1}{\operatorname{tg}(3x)} \cdot \frac{1}{\cos^2(3x)} \cdot 3 = \frac{3}{\sin(3x)\cos(3x)}$.

Teraz $\left(\frac{x^2+10x+26}{x+5}\right)' = \left(\left(\frac{x^2+10x+26}{x+5}\right)^{1/3}\right)' = \frac{1}{3}\left(\frac{x^2+10x+26}{x+5}\right)^{-2/3}\left(\frac{x^2+10x+26}{x+5}\right)' =$

$= \frac{1}{3}\left(\frac{x+5}{x^2+10x+26}\right)^{2/3}\left(\frac{(2x+10x)(x+5)-(x^2+10x+26)}{(x+5)^2}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{x+5}{x^2+10x+26}\right)^{2/3} \cdot \frac{x^2+10x+24}{(x+5)^2} =$

$= \frac{x^2+10x+24}{3\sqrt[3]{(x+5)^4(x^2+10x+26)^2}}$.

Ostatnia: $\left(\big(7+\sin(5x)\big)^{1/(2x+3)}\right)' = \left(e^{\ln(7+\sin(5x))/(2x+3)}\right)' = e^{\ln(7+\sin(5x))/(2x+3)} \cdot \left(\frac{\ln(7+\sin(5x))}{2x+3}\right)' =$

$= \big(7+\sin(5x)\big)^{1/(2x+3)} \cdot \left(\ln(7+\sin(5x)) \cdot \frac{1}{2x+3}\right)' =$

$= \big(7+\sin(5x)\big)^{1/(2x+3)} \cdot \left(\frac{5\cos(5x)}{7+\sin(5x)} \cdot \frac{1}{2x+3} + (\ln(7+\sin(5x)) \cdot \frac{-2}{(2x+3)^2}\right) =$

$= \big(7+\sin(5x)\big)^{1/(2x+3)} \cdot \frac{5(2x+3)\cos(5x)-2(7+\sin(5x)\ln(7+\sin(5x))}{(7+\sin(5x)(2x+3)^2}$ — wcale nie wiadomo, czy ostatnia postać jest prostsza od przedostatniej. Napisałem wynik w dwu postaciach, można jeszcze inaczej, to nie ma już żadnego znaczenia.

---

2. (3 pt.) Podać definicję pochodnej funkcji f w punkcie 1.

$f'(1) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

(7 pt.) Obliczyć wartość $f(1)$ oraz pochodną $f'(1)$, jeśli

$$f(x) = \ln(1+2\operatorname{tg}(\pi x)) \cdot \sqrt{3+x} \cdot (3-x)^3 \cdot \log_{10}\left(\left(1+2x+3x^2+4x^3\right)^5\right).$$

$f(1) = \ln(1+2\operatorname{tg}(\pi)) \cdot \sqrt{4} \cdot 2^3 \cdot \log_{10}(1+2+3+4)^5 = \ln 1 \cdot 16 \cdot \log_{10} 10^5 = 0$.
Ponieważ $f(1)=0$, więc $f'(1) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1+h)}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to 0} \frac{\ln(1+2\operatorname{tg}(\pi+\pi h))}{h} \cdot \sqrt{4+h} \cdot (2-h)^3 \cdot \log_{10}(1+2(1+h)+3(1+h)^2+4(1+h)^3)^5 =$

$= \lim\limits_{h\to 0} \frac{\ln(1+2\operatorname{tg}(\pi h))}{2\operatorname{tg}(\pi h)} \cdot \frac{2\operatorname{tg}(\pi h)}{\pi h} \cdot \pi \cdot \sqrt{4+h} \cdot (2-h)^3 \log_{10}(1+2(1+h)+3(1+h)^2+4(1+h)^3)^5 =$

$= 1 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot 2^3 \cdot \log_{10}(10^5) = 160\pi$ — przekształcając skorzystałem z tego, że $\operatorname{tg}(\alpha+\pi) = \operatorname{tg}(\alpha)$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$ oraz z twierdzenia o arytmetycznych własnościach granicy funkcji.

---

3. Niech $f(x)=\sqrt{x^2+15}$ dla każdego $x\in\mathbb{R}$.

(1 pt.) Znaleźć prostą T_P styczną do wykresu funkcji f w punkcie $P=(-1,4)$.

(3 pt.) Znaleźć prostą T_Q styczną do wykresu funkcji f w punkcie $Q=\big(q,f(q)\big)$, $q\in\mathbb{R}$.

(6 pt.) Niech $F_g=\big(0,\sqrt{30}\big)$, $F_d=\big(0,-\sqrt{30}\big)$. Udowodnić, że kąt ostry między prostymi T_P i F_gP jest równy kątowi ostremu między prostymi T_P i F_dP.

Mamy $f(-1)=\sqrt{(-1)^2+15}=4$, więc punkt $(-1,4)$ leży na wykresie funkcji, zgodnie z oczekiwaniami. $f'(x)=\frac{1}{2}(x^2+15)^{-1/2}\cdot 2x=\frac{x}{\sqrt{x^2+15}}$, więc $f'(-1)=-\frac{1}{4}$. Wobec tego styczna do wykresu w punkcie $(-1,4)$ ma równanie $y=-\frac{1}{4}x+\frac{15}{4}$.

Ponieważ $f'(q)=\frac{q}{\sqrt{q^2+15}}$, więc styczną do wykresu w punkcie $(q,f(q))$ jest prosta o równaniu $y=\frac{q}{\sqrt{q^2+15}}x+\frac{15}{\sqrt{q^2+15}}$.

Mamy $\overrightarrow{PF_g}=[0-(-1),\sqrt{30}-4]=[1,\sqrt{30}-4]$, $\overrightarrow{PF_d}=[0-(-1),-\sqrt{30}-4]=[1,-\sqrt{30}-4]$. Wektor $\mathbf{v}=[1,f'(-1)]=[1,-\frac{1}{4}]$ jest styczny do wykresu funkcji f w punkcie $(-1,4)$. Mamy więc $\|\overrightarrow{PF_d}\|=\sqrt{1+(\sqrt{30}-4)^2}=\sqrt{47-8\sqrt{30}}$, $\|\overrightarrow{PF_d}\|=\sqrt{1+(-\sqrt{30}-4)^2}=\sqrt{47+8\sqrt{30}}$ oraz $\|\mathbf{v}\|=\sqrt{1+(-\frac{1}{4})^2}=\frac{1}{4}\sqrt{17}$. Wobec tego kosinus kąta między wektorami $\overrightarrow{PF_g}$ i $\mathbf{v}$ jest równy $\dfrac{1\cdot 1+(\sqrt{30}-4)\cdot(-\frac{1}{4})}{\sqrt{47-8\sqrt{30}}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{17}}=\dfrac{8-\sqrt{30}}{2\cdot\sqrt{17}\cdot\sqrt{47-8\sqrt{30}}}$ a kosinus kąta między wektorami $\overrightarrow{PF_d}$ i $\mathbf{v}$ to liczba $\dfrac{1\cdot 1+(-\sqrt{30}-4)\cdot(-\frac{1}{4})}{\sqrt{47+8\sqrt{30}}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{17}}=\dfrac{8+\sqrt{30}}{2\cdot\sqrt{17}\cdot\sqrt{47+8\sqrt{30}}}$. Należy wykazać, że te dwa kosinusy są równe, czyli że $\frac{8-\sqrt{30}}{\sqrt{47-8\sqrt{30}}}=\frac{8+\sqrt{30}}{\sqrt{47+8\sqrt{30}}}$. Ostatnia równość jest równoważna temu, że

$(8-\sqrt{30})^2(47+8\sqrt{30})=(8+\sqrt{30})^2(47-8\sqrt{30})$, czyli

$(94-16\sqrt{30})(47+8\sqrt{30})=(94+16\sqrt{30})(47-8\sqrt{30})$ a ta z kolei równości

$2(47-8\sqrt{30})(47+8\sqrt{30})=2(47+8\sqrt{30})(47-8\sqrt{30})$.

Ostatnia równość jest prawdziwa, bo mnożenie liczb jest przemienne.

W tym zadaniu należało wiedzieć, że iloczyn skalarny wektorów jest równy iloczynowi ich długości i kosinusa kąta między nimi, choć można było skorzystać z twierdzenia znanego ze szkoły (zapewne) mówiącego, że dwusieczna kąta $\sphericalangle BAC$ w trójkącie ABC przecina bok BC w takim punkcie D, że $\frac{BD}{CD}=\frac{BA}{CA}$.

---

4. Niech $f(x) = \sqrt[3]{2x^3 - 3x^2 - 12x - 7}$ dla $x \in \mathbb{R}$.

(2 pt.) Obliczyć $f'(x)$ dla tych x, dla których ta pochodna istnieje, niezależnie od tego, czy jest ona skończona, czy nie.

(3 pt.) Ustalić, na jakich przedziałach funkcja f rośnie, a na jakich maleje.

(2 pt.) Dla jakich $a \in \mathbb{R}$ istnieje dokładnie jedna liczba x, dla której $f(x) = a$, dla jakich a istnieją dokładnie dwie takie liczby x, dla jakich a — dokładnie trzy takie liczby x, a dla jakich a takich liczb x jest jeszcze więcej więcej?

(3 pt.) Dowieść, że jeśli $7 \leqslant s < t$, to $t - s < f(t) - f(s) < 2(t - s)$.

Mamy $f'(x) = \left(\sqrt[3]{2x^3 - 3x^2 - 12x - 7}\right)' = \frac{1}{3}(2x^3 - 3x^2 - 12x - 7)^{-2/3} \cdot (6x^2 - 6x - 12) = 2(2x^3 - 3x^2 - 12x - 7)^{-2/3}(x^2 - x - 2) = 2(2x^3 - 3x^2 - 12x - 7)^{-2/3}(x + 1)(x - 2)$. Zauważmy, że $2x^3 - 3x^2 - 12x - 7 = (x + 1)(2x^2 - 5x - 7) = (x + 1)^2(2x - 7)$, więc uzyskany przed chwilą wzór na pochodną nie działa w wypadku $x = -1$ oraz $x = \frac{7}{2}$, bo przez 0 nie można dzielić. Sprawdzimy korzystając z definicji pochodnej, czy istnieją $f'(-1)$ i $f'(\frac{7}{2})$. Mamy $f(-1) = 0$, zatem $f'(-1) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(-1+h)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{1}{h}\sqrt[3]{h^2(-9 + 2h)} = \lim\limits_{h\to 0} \sqrt[3]{\frac{-9+2h}{h}}$. Niestety ta granica nie istnieje, bo granice jednostronne są różne: $\lim\limits_{h\to 0^+} \sqrt[3]{\frac{-9+2h}{h}} = -\infty$, a $\lim\limits_{h\to 0^-} \sqrt[3]{\frac{-9+2h}{h}} = +\infty$.

Natomiast $f'(\frac{7}{2}) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(\frac{7}{2}+h)-f(\frac{7}{2})}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(\frac{7}{2}+h)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{1}{h}\sqrt[3]{(\frac{9}{2} + h)^2(2h)} = \lim\limits_{h\to 0} \sqrt[3]{\frac{(9+2h)^2}{2h^2}} = +\infty$, więc w punkcie $\frac{7}{2}$ pochodna istnieje i jest równa $+\infty$. Z otrzymanych równości wynika, że pochodna jest dodatnia dla $x > 2$ oraz dla $x < -1$. Gdy $-1 < x < 2$, to $f'(x) < 0$. Wynika stąd, że na każdej z półprostych $(-\infty, -1]$, $[2, \infty)$ funkcja f jest ściśle rosnąca, a na przedziale $[-1, 2]$ — ściśle malejąca. Mamy też $f(-1) = 0$ i $f(2) = -3$. Zachodzą też równości $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ i $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$. Stąd wnioskujemy, że dla każdego $a < -3$ istnieje dokładnie jedna taka liczba x, że $f(x) = a$, przy czym $x < -1$. Dla każdego $a > 0$ istnieje dokładnie jedna taka liczba x, że $f(x) = a$, w tym wypadku $x > \dfrac{7}{2}$. Równość $f(x) = 0$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $x = -1$ lub $x = \frac{7}{2}$. Natomiast $f(x) = -3$ wtedy i tylko wtedy, gdy $2x^3 - 3x^2 - 12x - 7 = -27$, czyli gdy $0 = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 20 = (x - 2)^2(2x + 5)$, więc gdy $x = 2$ lub $x = -\frac{5}{2}$. Dla każdego $a \in (-3, 0)$ istnieją dokładnie trzy takie liczby x, że $f(x) = a$: jedna w przedziale $(-\frac{5}{2}, -1)$, druga w przedziale $(-1, 2)$ i trzecia w przedziale $(2, \frac{7}{2})$. Więcej niż trzy nie istnieją dla żadnego a, bo w przedziale, w którym funkcja f jest ściśle rosnąca, istnieje co najwyżej jedno rozwiązanie równania $f(x) = a$.

Mamy jeszcze dowieść, że jeśli $7 \leqslant s < t$, to $t-s < f(t)-f(s) < 2(t-s)$, czyli że $1 < \frac{f(t)-f(s)}{t-s} < 2$.

Z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej wynika, że istnieje takie $c \in (s, t)$, że $\frac{f(t)-f(s)}{t-s} = f'(c)$.

Mamy $c > s \geqslant 7$ i $f'(c) = \frac{2(c+1)(c-2)}{(c+1)^{4/3}(2c-7)^{2/3}} = 2\left(\frac{(c-2)^3}{(c+1)(2c-7)^2}\right)^{1/3} = 2\left(\frac{c-2}{c+1} \cdot \left(\frac{c-2}{c-2+c-5}\right)^2\right)^{1/3} < 2$.

Mamy też $f'(c) = \frac{2(c+1)(c-2)}{(c+1)^{4/3}(2c-7)^{2/3}} = \left(\frac{(2c-4)^3}{(c+1)(2c-7)^2}\right)^{1/3} = \left(\frac{c+1+c-5}{c+1} \cdot \left(\frac{2c-4}{2c-4-3}\right)^2\right)^{1/3} > 1$. Wykazaliśmy, że $1 < f'(c) < 2$ dla każdego $c > 7$, co kończy dowód.

---

5. (10 pt.) W zbiorze złożonym z tych punktów (x,y), których współrzędne spełniają równanie $x^2-y^2=15$ i nierówność $x>0$, znaleźć punkt najbliższym punktowi $\left(-\frac{32}{3},\frac{14}{3}\right)$.

Warunki $x^2-y^2=15$ i $x>0$ są spełnione wtedy i tylko wtedy, gdy $x=\sqrt{y^2+15}$. Naszym zadaniem jest zminimalizowanie odległości punktów $\left(\sqrt{y^2+15},y\right)$ i $\left(-\frac{32}{3},\frac{14}{3}\right)$, co jest równoważne znalezieniu najmniejszej wartości funkcji $\left(\sqrt{y^2+15}+\frac{32}{3}\right)^2+(y-\frac{14}{3})^2$. Jej pochodną jest wyrażenie $\frac{1}{2}(y^2+15)^{-1/2}\cdot 2y\cdot 2\left(\sqrt{y^2+15}+\frac{32}{3}\right)+2(y-\frac{14}{3})=4y-\frac{28}{3}+\frac{64y}{3\sqrt{y^2+15}}$. Jeśli ta pochodna jest równa 0, to $\left(\frac{16y}{3\sqrt{y^2+15}}\right)^2=(\frac{7}{3}-y)^2$, więc $(16y)^2=(7-3y)^2(y^2+15)$. Otrzymaliśmy równanie czwartego stopnia, więc usiłujemy odgadnąć pierwiastki całkowite, a potem wymierne. Po wymnożeniu otrzymujemy $16^2y^2=9y^4-42y^3+184y^2-42\cdot 15y+49\cdot 15$, czyli $0=9y^4-42y^3-72y^2-42\cdot 15y+49\cdot 15$, więc $0=3y^4-14y^3-24y^2-42\cdot 5y+49\cdot 5$. Oznacza to, że jeśli ułamek nieskracalny $\frac{p}{q}$, p, q — całkowite, jest pierwiastkiem tego równania, to p jest dzielnikiem liczby $5\cdot 7^2$, a q — dzielnikiem liczby 3. Od razu widać, że jeśli $y=1$, to równanie $(16y)^2=(7-3y)^2(y^2+15)$ jest spełnione. Liczba -1 nie jest jego pierwiastkiem, bo liczba $(7+3)^2(1+15)$ dzieli się przez 5^2, a liczba 16^2 — nie. Dla $y=\pm 5$ otrzymujemy po lewej stronie liczbę $16^2\cdot 5^2$, więc podzielną przez 5^2, a po prawej stronie liczbę $(7\mp 3\cdot 5)^2(25+15)$ podzielną przez 5, ale nie przez 25. Tak samo jest dla innych liczb y podzielnych przez 5. Gdy $y=7$, to $(7-3y)^2(y^2+15)=2\cdot 7^2\cdot 64=2\cdot 7^2\cdot 2^6=7^2\cdot 2^8$, a $(16y)^2=2^8\cdot 7^2$. Oznacza to, że liczba 7 też jest pierwiastkiem równania $0=3y^2-14y^3-24y^2-210y+245=$ $=(y-1)(3y^3-11y^2-35y-245)=(y-1)(y-7)(3y^2+10y+35)$, a ponieważ $10^2-4\cdot 3\cdot 35<0$, więc innych rzeczywistych pierwiastków to równanie nie ma. Liczba 7 jednak nie jest pierwiastkiem równania $4y-\frac{28}{3}+\frac{64y}{3\sqrt{y^2+15}}=0$, bo $4\cdot 7-\frac{28}{3}+\frac{64\cdot 7}{3\sqrt{7^2+15}}>28-\frac{28}{3}>0$. Jedynym pierwiastkiem pochodnej jest więc liczba 1, przy czym dla $y>1$ pochodna jest dodatnia (tak jest dla $y=7$, a na półprostej $(1,+\infty)$ znak pochodnej jest stały), a dla $y<1$ — ujemna (tak jest dla $y=0$, a na półprostej $(-\infty,1)$ znak pochodnej jest stały), więc w punkcie 1 funkcja przyjmuje najmniejszą wartość, a to oznacza, że spośród punktów zbioru $\{(x,y):\quad x^2-y^2=15 \text{ i } x>0\}$ najbliżej punktu $\left(-\frac{32}{3},\frac{14}{3}\right)$ znajduje się punkt $(4,1)$.

Uwaga. Można nie badać znaku pochodnej, a tylko znaleźć jej miejsce zerowe. Jeśli $|y|\geqslant 1000$, to $\left(\sqrt{y^2+15}+\frac{32}{3}\right)^2+(y-\frac{14}{3})^2\geqslant 1000^2>15^2+5^2>\left(\sqrt{1^2+15}+\frac{32}{3}\right)^2+(1-\frac{14}{3})^2$. Na przedziale domkniętym funkcja $\left(\sqrt{y^2+15}+\frac{32}{3}\right)^2+(y-\frac{14}{3})^2$ przyjmuje najmniejszą wartość (twierdzenie Weierstrassa o osiąganiu kresów) i to w jego punkcie wewnętrznym (bo w końcach przedziału $[-1000.1000]$ wartości tej funkcji są większe niż w punkcie 1). Tam pochodna musi być równa 0, a taki punkt jest tylko jeden, mianowicie $y=1$.