Matematyka A, kolokwium, 26 listopada 2014, 18:15 – 20:05

Rozwiązania różnych zadań mają znaleźć się na różnych kartkach, bo sprawdzać je będą różne osoby.

Każda kartka musi być podpisana w **lewym górnym rogu** *imieniem i nazwiskiem piszącego, jego nr. indeksu, nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia.*

Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; należy je wyłączyć i schować! Nie dotyczy rozruszników serca.

Nie wolno korzystać z tablic ani notatek! Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i **należy** powoływać się na twierdzenia, które zostały *udowodnione* w czasie zajęć .

Należy przeczytać **CAŁE** zadanie **PRZED** rozpoczęciem rozwiązywania go!

---

1. (1 pt.) Niech $a_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2n-3} - \frac{1}{2n-2} + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}$ dla $n = 1, 2, 3 \ldots$. Obliczyć a_1 i a_2. Nie trzeba upraszczać.

(1 pt.) Wykazać, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność $a_n < a_{n+1}$.

(1 pt.) Niech $b_n = 1 + \frac{1}{3} - \frac{2}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{2}{8} + \cdots + \frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{2}{4n}$ dla $n = 1, 2, 3 \ldots$. Obliczyć b_1 i b_2. Nie trzeba upraszczać.

(1 pt.) Wykazać, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność $b_n < b_{n+1}$.

(4 pt.) Wykazać, że $a_n < 1 - \frac{1}{2n}$ oraz $b_{n+1} \le b_n + \frac{1}{n(n+1)} = b_n + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$ dla $n = 2, 3, 4, \ldots$, więc $b_{n+1} \le b_2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} < b_2 + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} < 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}$.

(2 pt.) Wykazać, że istnieją granice $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ oraz $\frac{1}{3} + \lim\limits_{n\to\infty} a_n < \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

---

2. Niech $A = (1, 2, 3)$, $B = (5, 6, 10)$, $D = (4, 8, 9)$, $A_1 = (2, 6, 11)$, czworokąt $ABCD$ jest równoległokiem, podobnie czworokąty: ABB_1A_1, ADD_1A_1 i $A_1B_1C_1D_1$.

a. (3 pt.) Obliczyć pole trójkąta ADA_1

b. (3 pt.) Obliczyć objętość równoległościanu $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

c. (2 pt.) Obliczyć odległość punktu B od płaszczyzny ADA_1.

d. (2 pt.) Obliczyć objętość czworościanu $ABDA_1$.

---

3. Obliczyć granicę ciągu (a_n), jeżeli $a_n =$

a. (2 pt.) $n \ln \frac{n^2+3n+5}{n^2+33n+55}$,

b. (2 pt.) $\sqrt{n + \sin n} \cdot \sin(\sqrt{n+9} - \sqrt{n+1})$,

c. (3 pt.) $\sin\left(\pi\sqrt{4n^2+3}\right)$,

d. (3 pt.) $\frac{\sqrt[n]{n^{2014}+1126} + n^{26} \cdot 0{,}999^n}{5\sqrt[n]{n+3^n} + 1525 \cdot 0{,}99^n}$.

---

4. (5 pt.) Obliczyć $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n + (1{,}8)^{2n}}$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n + (1{,}3)^{4n}}$.

(5 pt.) Obliczyć $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^3 \cdot 3^n + n^2 \cdot (1{,}8)^{2n}}$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2 \cdot 3^n + n \cdot (1{,}3)^{4n}}$.

---

5. Niech $a_0 \in (0, 2)$ i $a_{n+1} = a_n(2 - a_n)$ dla $n = 0, 1, 2, \ldots$.

(4 pt.) Wykazać, że $a_n \le 1$ oraz $a_{n+1} \ge a_n$ dla $n = 1, 2, 3, \ldots$

(3 pt.) Dowieść, że ciąg (a_n) ma granicę i znaleźć ją.

(3 pt.) Niech $g = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Dowieść, że $g - a_{n+1} \le (g - a_n)^2$ dla $n = 1, 2, 3, \ldots$

Fakciki: $1 + 1 = 2$, $6^2 = 36$; $7^2 = 49$; $8^2 = 64$; $13^2 = 169$; $17^2 = 289$; $18^2 = 324$; $0 < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin x < x < \operatorname{tg} x$; $x < 1 \Rightarrow 1 + x \le e^x \le \frac{1}{1-x}$; $-1 < x \Rightarrow \frac{x}{1+x} \le \ln(1+x) \le x$;