

Matematyka A, kolokwium, 29 października 2014, 18:15 – 20:05

Rozwiązania różnych zadań mają znaleźć się na różnych kartkach, bo sprawdzać je będą różne osoby. Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU nazwiskiem i imieniem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia.

Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, muszą być schowane i wyłączone! Nie dotyczy rozruszników serca.

Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały udowodnione na wykładzie lub na ćwiczeniach.

Należy przeczytać **CAŁE** zadanie **PRZED** rozpoczęciem rozwiązywania go!

1. Niech $A = (1, 2, 2)$, $B = (7, -5, 8)$ i $C = (7, 5, 4)$.
 - (2 p.) Znaleźć $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$.
 - (1 p.) Obliczyć pole trójkąta ABC .
 - (1 p.) Obliczyć długość odcinka AB .
 - (1 p.) Obliczyć odległość punktu C od prostej AB .
 - (2 p.) Znaleźć punkt X , który dzieli odcinek AB w stosunku $3 : 4$, tzn. $\frac{AX}{XB} = \frac{3}{4}$.
 - (1 p.) Znaleźć równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkty A, B, C .
 - (2 p.) Znaleźć punkt wspólny trzech środkowych trójkąta ABC .
-

2. (3 p.) Podać definicję kosinusa dowolnego kąta $t > 0$.
 - (2 p.) Znaleźć kosinus kąta α między wektorami $[6, 3, 2]$ i $[6, -7, 6]$.
 - (2 p.) Wykazać, że jeśli liczba a jest miarą kąta α w stopniach, to $90^\circ > a > 60^\circ$.
 - (3 p.) Znaleźć $\sin \alpha$. Wykazać, że $\sin \alpha < 2 \sin \frac{\alpha}{2}$.
-

3. (4 p.) Podać definicję logarytmu liczby a przy podstawie b . Jakie liczby wolno logarytmować i przy jakich podstawach?
 - (6 p.) Wykazać, że: $\frac{2}{9} + \log_{10} 3 > \log_{10} 5 > \frac{1}{11} + \frac{14}{11} \log_{10} 3$.
-

4. (10 p.) Rozwiązać równanie wiedząc, że ma ono co najmniej jeden wymierny pierwiastek:

$$\log_{10}(x-2) + \log_{10}(x-3) + \log_{10}(x+3) = \log_{10} 13 + \frac{1}{3} \log_{10} 27 + \frac{3}{4} \log_{10} \frac{1}{16}.$$

5. (7 p.) Rozwiązać nierówność $8 \sin^4 t - 10 \sin^2 t + 3 < 0$
 - (3 p.) Zilustrować jej rozwiązanie na okręgu $x^2 + y^2 = 1$.
-

Ciekawostki (któż wie, co się może przydać): $3^3 = 27$, $3^6 = 729$, $3^9 = 19683$, $3^{12} = 531441$, $3^{15} = 14348907$, $11^3 = 1331$, $11^6 = 1771561$, $5^6 = 15625$, $5^9 = 1953125$, $5^{12} = 244140625$, $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $\cos \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}$, $\sin \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.