Matematyka A, egzamin, 10 wrzenia 2014, 10:10 — 13:10

Rozwiązania różnych zadań mają znaleźć się na różnych kartkach, bo sprawdzać je będą różne osoby.

Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU imieniem i nazwiskiem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia.

Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, muszą być schowane i wyłączone! Nie dotyczy rozruszników serca.

Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały *udowodnione* na wykładzie lub na ćwiczeniach.

PRZED rozpoczęciem rozwiązywania zadania należy je **CAŁE** przeczytać!

---

1. (10 pt.) Znaleźć wszystkie takie funkcje różniczkowalne $f\colon (0,\infty) \longrightarrow (0,\infty)$, że dla każdego $t > 0$ styczna do wykresu funkcji f w punkcie $P = (t, f(t))$ przecina oś OX w punkcie $Q = \left(\frac{3t}{2}, 0\right)$.

---

2. (8 pt.) Znaleźć rozwiązanie ogólne układu równań

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + 2y(t) + 18e^{3t}, \\ y'(t) = 4x(t) - y(t)\,. \end{cases} \tag{R}$$

(2 pt.) Znaleźć rozwiązanie układu równań (R), które spełnia warunki: $x(0) = 1$ i $y(0) = -2$.

---

3. (8 pt.) Znaleźć wszystkie takie liczby zespolone z, że $z^7 + 8z^4 - 4z^3 - 32 = 0$.

(2 pt.) Zaznaczyć wszystkie znalezione w poprzednim punkcie liczby na płaszczyźnie.

---

4. (2 pt.) Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$x''(t) - 10x'(t) + 41x(t) = 0\,.$$

(6 pt.) Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$x''(t) - 10x'(t) + 41x(t) = 272\left(e^{5t} + e^{4t} + e^{5t}(\cos(4t) + \sin(4t))\right) + 445\sin(4t) + 1681t^2 + 5\,.$$

(2 pt.) Znaleźć rozwiązanie zagadnienia początkowego

$$\begin{cases} x''(t) - 10x'(t) + 41x(t) = 272\left(e^{5t} + e^{4t} + e^{5t}(\cos(4t) + \sin(4t))\right) + 445\sin(4t) + 1681t^2 + 5. \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

---

5. Niech $f(x,y) = \big(x^2 + y^2 - 25\big)\big(y^2 - x^2 - 9\big)$. Wiadomo, że $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x\big(y^2 - x^2 - 9\big) - 2x\big(x^2 + y^2 - 25\big)$ oraz $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y\big(y^2 - x^2 - 9\big) + 2y\big(x^2 + y^2 - 25\big)$.

(2 pt.) Znaleźć punkty zerowania się gradientu funkcji f.

(2 pt.) Znaleźć lokalne ekstrema funkcji f.

(3 pt.) Znaleźć największą i najmniejszą wartość funkcji f w kole $\{(x,y)\colon\ x^2 + y^2 \le 1\}$.

(3 pt.) Znaleźć największą i najmniejszą wartość funkcji f w kole $\{(x,y)\colon\ x^2 + y^2 \le 25\}$.

Ciekawostki: $15 \cdot 17 = 255$, $16 \cdot 17 = 272$, $17 \cdot 17 = 289$, $19 \cdot 17 = 323$, $1681 = 1600 + 80 + 1$