Matematyka A, egzamin, 25 czerwca 2014, 10:10 — 13:10

Rozwiązania różnych zadań mają znaleźć się na różnych kartkach, bo sprawdzać je będą różne osoby.

Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU imieniem i nazwiskiem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia.

Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, muszą być schowane i wyłączone! Nie dotyczy rozruszników serca.

Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały *udowodnione* na wykładzie lub na ćwiczeniach.

Należy przeczytać **CAŁE** zadanie **PRZED** rozpoczęciem rozwiązywania go!

---

1. **(10 pt.)** Znaleźć wszystkie takie funkcje różniczkowalne $f\colon (0,\infty) \longrightarrow (0,\infty)$, że dla każdego $t > 0$ styczna do wykresu funkcji f w punkcie $P = (t, f(t))$ przecina oś OX w takim punkcie $Q = (c, 0)$, $t > c > 0$, że pole trójkąta PQR, gdzie $R = (t, 0)$ jest trzy razy mniejsze od pola trójkąta POQ, gdzie $O = (0, 0)$.

---

2. Znaleźć rozwiązanie ogólne układu równań

$$\begin{cases} x'(t) = -14x(t) + 25y(t), \\ y'(t) = -9x(t) + 16y(t), \end{cases}$$

które spełnia warunki $x(0) = 2$ oraz $y(0) = 1$.

---

3. **(8 pt.)** Znaleźć wszystkie takie liczby zespolone z, że $z^7 - 8z^4 + 4z^3 - 32 = 0$.

(2 pt.) Zaznaczyć wszystkie znalezione w poprzednim punkcie liczby na płaszczyźnie.

---

4. **(2 pt.)** Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$x''(t) - 8x'(t) + 25x(t) = 0.$$

(6 pt.) Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$x''(t) - 8x'(t) + 25x(t) = 90e^{4t} - 90e^{3t} + 90e^{4t}(\cos(3t) + \sin(3t)) - 104\sin(3t) + 625t^2.$$

(2 pt.) Znaleźć rozwiązanie zagadnienia początkowego

$$\begin{cases} x''(t) - 8x'(t) + 25x(t) = 90e^{4t} - 90e^{3t} + 90e^{4t}(\cos(3t) + \sin(3t)) - 104\sin(3t) + 625t^2. \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

---

5. Niech $f(x,y) = \big(4x^2 + y^2 - 5\big)\big(x^2 + 4y^2 - 5\big)$. Wiadomo, że $\frac{\partial f}{\partial x} = 8x\big(x^2 + 4y^2 - 5\big) + 2x\big(4x^2 + y^2 - 5\big)$ oraz $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y\big(x^2 + 4y^2 - 5\big) + 8y\big(4x^2 + y^2 - 5\big)$.

(2 pt.) Znaleźć punkty zerowania się gradientu funkcji f.

(2 pt.) Znaleźć lokalne ekstrema funkcji f.

(3 pt.) Znaleźć największą i najmniejszą wartość funkcji f w kole $\{(x,y)\colon \quad x^2 + y^2 \le 1\}$.

(3 pt.) Znaleźć największą i najmniejszą wartość funkcji f w kole $\{(x,y)\colon \quad x^2 + y^2 \le 5\}$.
