Matematyka A, kolokwium, 21 maja 2014 — Rozwiązania

Bardzo proszę o powiadamianie o zauważonych błędach

Rozwiązania różnych zadań mają znaleźć się na różnych kartkach, bo sprawdzać je będą różne osoby. Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU imieniem i nazwiskiem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia.

Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, muszą być schowane i wyłączone! Nie dotyczy rozruszników serca.

Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały *udowodnione* na wykładzie lub na ćwiczeniach.

Należy przeczytać **CAŁE** zadanie **PRZED** rozpoczęciem rozwiązywania go!

Szukając rozwiązania np. w postaci $(At^3+Bt^2+Ct+D)e^{11t}$ czasem warto oznaczyć pierwszy czynnik jakoś, powiedzmy $w(t)=At^3+Bt^2+Ct+D$ i dalej pisać $w(t)e^{11t}$, $w'(t)e^{11t}$, $w''(t)e^{11t}$ i dopiero na końcu podstawić At^3+Bt^2+Ct+D w miejsce $w(t)$, $3At^2+2Bt+C$ w miejsce $w'(t)$ itd.

. . . .

1. (5 pt.) Znaleźć rozwiązanie ogólne równania $t^2x'(t)+2tx(t)=1-\cos t$.

(5 pt.) Znaleźć takie rozwiązanie równania $t^2x'(t)+2tx(t)=1-\cos t$, że $x(0)=0$.

Rozwiązanie. Mamy $(t^2x(t))'=t^2x'(t)+2tx(t)=1-\cos t$, więc $t^2x(t)=\int(1-\cos t)\,dt=t-\sin t+C$. Stąd $x(t)=\frac{t-\sin t}{t^2}+\frac{C}{t^2}$, C jest tu dowolna liczbą. Dla $C\neq 0$ dziedziną rozwiązania jest półprosta $(-\infty,0)$ lub półprosta $(0,\infty)$, dla każdej stałej są dwa rozwiązania, bo dziedziną rozwiązania równania różniczkowego ma być przedział.

Dla $C=0$ otrzymujemy funkcję $x(t)=\frac{t-\sin t}{t^2}$, która pozornie jest nieokreślona w punkcie 0, ale z równości $x(t)=\frac{t-\sin t}{t^2}=\frac{t}{3!}-\frac{t^3}{5!}+\ldots$ wynika jednak, że w punkcie 0 też jest dobrze określona i zachodzi równość $x(0)=0$.

Zamiast szeregu można użyć regułę de l'Hospitala lub wzór Taylora i otrzymać ten sam rezultat.

Można również rozwiązywać nieco dłuższą metodą. Przepisać równanie w postaci

$$x'(t)=-\frac{2}{t}x(t)+\frac{1-\cos t}{t^2}.$$

Potem rozwiązać równanie jednorodne $x'(t)=-\dfrac{2}{t}x(t)$ rozdzielając zmienne: $\ln|x(t)|=\int\frac{dx}{x}=\int\frac{x'(t)dt}{x(t)}=-2\int\frac{dt}{t}=-2\ln|t|+\tilde{C}$. Stąd otrzymujemy $x(t)=\pm e^{\tilde{C}}t^{-2}=Ct^{-2}$. Uzmienniamy stałą C, czyli szukamy rozwiązania w postaci $x(t)=C(t)t^{-2}$. Wstawiamy do równania:
$C'(t)t^{-2}-2C(t)t^{-3}=-2C(t)t^{-3}+\frac{1-\cos t}{t^2}$. Stąd $C'(t)=1-\cos t$, zatem $C(t)=t-\sin t+c$.
W końcu $x(t)=\frac{t-\sin t}{t^2}+\frac{c}{t^2}$. Dalszy ciąg pokrywa się z poprzednim rozwiązaniem.

---

2. **(2 pt.)** Znaleźć rozwiązanie ogólne równania $x''(t)-4x'(t)+4x(t)=0$.

Rozwiązanie. Równanie charakterystyczne wygląda tak: $0=\lambda^2-4\lambda+4\lambda=(\lambda-2)^2$, więc $\lambda_1=\lambda_2=2$ i wobec tego $x(t)=(c_1+c_2t)e^{2t}$.

(6 pt.) Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$x''(t)-4x'(t)+4x(t)=2+(18+80t^2)e^{-2t}+80t^2e^{2t}-8\cos(2t).$$

Każdy widzi, jeśli tylko chce zobaczyć, że funkcja stała $x_1(t)=\frac{1}{2}=\frac{2}{4}$ spełnia równanie $x''(t)-4x'(t)+4x(t)=2$.

Znajdziemy teraz jedno rozwiązanie równania $x''(t)-4x'(t)+4x(t)=(18+80t^2)e^{-2t}$. Szukać będziemy w postaci $w(t)e^{-2t}$. Mamy $\big(w(t)e^{-2t}\big)'=\big(w'(t)-2w(t)\big)e^{-2t}$. Teraz obliczymy drugą pochodną: $\big(w(t)e^{-2t}\big)''=\Big(\big(w'(t)-2w(t)\big)e^{-2t}\Big)'=$
$=\big(w''(t)-2w'(t)-2w'(t)+4w(t)\big)e^{-2t}=\big(w''(t)-4w'(t)+4w(t)\big)e^{-2t}$. Z otrzymanych równości wnioskujemy, że $(18+80t^2)e^{-2t}=x''(t)-4x'(t)+4x(t)=$
$=e^{-2t}\big(w''(t)-4w'(t)+4w(t)-4(w'(t)-2w(t))+4w(t)\big)=e^{-2t}\big(w''(t)-8w'(t)+16w(t)\big)$.
Znajdziemy funkcję w w postaci At^2+Bt+C (pochodna w' wielomianu w ma stopień o jeden mniejszy od stopnia wielomianu). Podstawiając otrzymujemy $(18+80t^2)e^{-2t}=$
$=\big(2A-8(2At+B)+16(At^2+Bt+C)\big)$, czyli

$$(18+80t^2)e^{-2t}=\big(2A-8B+16C-16(A-B)t+16At^2\big)e^{-2t}.$$

Z otrzymanego równania wynikają następujace równości $16A=80$, $-16(A-B)=0$ i $2A-8B+16C=18$, Z nich wnioskujemy kolejno $A=5$, $B=5$ i $C=2$. Funkcja $x_2(t)=(5t^2+5t+3)e^{-2t}$ spełnia więc równanie $(18+80t^2)e^{-2t}=x''(t)-4x'(t)+4x(t)$.

Teraz zajmiemy się równaniem $x''(t)-4x'(t)+4x(t)=80t^2e^{2t}$. Znajdziemy jego rozwiązanie w postaci $x(t)=w(t)e^{2t}$. Mamy $x'(t)=\big(w(t)e^{2t}\big)'=\big(w'(t)+2w(t)\big)e^{2t}$ oraz $x''(t)=\big(w(t)e^{2t}\big)''=\big((w'(t)+2w(t))e^{2t}\big)'=\big(w''(t)+2w'(t)+2w'(t)+4w(t)\big)e^{2t}=$
$=\big(w''(t)+4w'(t)+4w(t)\big)e^{2t}$, zatem
$x''(t)-4x'(t)+4x(t)=\big(w''(t)+4w'(t)+4w(t)-4(w'(t)+2w(t))+4w(t)\big)e^{2t}=w''(t)e^{2t}$.
Otrzymaliśmy równanie $w''(t)e^{2t}=80t^2e^{2t}$, czyli $w''(t)=80t^2$. Jest ono spełnione m. in. przez funkcję $\frac{80}{3\cdot 4}t^4=\frac{20}{3}t^4$ (scałkowaliśmy dwukrotnie). Wynika stąd, że funkcja $x_3(t)=\frac{20}{3}t^4e^{2t}$ spełnia równanie $x''(t)-4x'(t)+4x(t)=80t^2e^{2t}$.

Ostatnia porcja obliczeń. Znajdziemy takie stałe A,B, że funkcja $A\cos(2t)+B\sin(2t)$ będzie rozwiązaniem równania $x''(t)-4x'(t)+4x(t)=-8\cos(2t)$. Możemy napisać teraz
$(A\cos(2t)+B\sin(2t))'=-2A\sin(2t)+2B\cos(2t)$ oraz
$(A\cos(2t)+B\sin(2t))''=(-2A\sin(2t)+2B\cos(2t))'=-4A\cos(2t)-4B\sin(2t)$.
Podstawiając do równania otrzymujemy $-8\cos(2t)=$
$=-4A\cos(2t)-4B\sin(2t)-4(-2A\sin(2t)+2B\cos(2t))+4(A\cos(2t)+B\sin(2t))=$
$=-8B\cos(2t)+8A\sin(2t)$, więc $B=1$ i $A=0$. Rozwiązaniem jest: $x_4(t)=\sin(2t)$.

Wynika stąd , że rozwiązaniem ogólnym jest funkcja

$$x(t)=x_1(t)+x_2(t)+x_3(t)+x_4(t)+(c_1+c_2t)e^{2t}=$$
$$=\tfrac{1}{2}+(5t^2+5t+3)e^{-2t}+\tfrac{20}{3}t^4e^{2t}+\sin(2t)+(c_1+c_2t)e^{2t}.$$

(2 pt.) Znaleźć wszystkie funkcje $x(t)$ spełniające oba warunki:

$$\begin{cases} x''(t)-4x'(t)+4x(t)=2+(18+80t^2)e^{-2t}+80t^2e^{2t}-8t\cos(2t), \\ x(0)=4. \end{cases}.$$

Rozwiązanie. Podstawiając w rozwiązaniu ogólnym $t=0$ otrzymujemy $4=\frac{1}{2}+3+c_1$. Wynika stąd, że $c_1=\frac{1}{2}$. Wobec tego dla dla każdej liczby c_2 funkcja $x(t)=\frac{20}{3}t^4e^{2t}+(5t^2+5t+3)e^{-2t}+\sin(2t)+(\frac{1}{2}+c_2t)e^{2t}$ jest rozwiązaniem badanego układu dwóch równań — jest nieskończenie wiele!

---

3. (1 pt.) Rozwiązać równanie $\lambda^2 + \lambda - 20 = 0$. $\lambda_1 = -5$, $\lambda_2 = 4$

(1 pt.) Znaleźć rozwiązanie ogólne równania $x''(t)+x'(t)-20x(t) = 0$. $x(t) = c_1e^{-5t}+c_2e^{4t}$

(8 pt.) Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$x''(t) + x'(t) - 20x(t) = 1 - 200t^2 - 64(1 + t)e^{-4t} + 9e^{4t} - 205\cos 5t - 205\sin 5t\,.$$

Znajdziemy kolejno po jednym rozwiązaniu każdego z równań:

$x''(t) + x'(t) - 20x(t) = 1 - 200t^2$,

$x''(t) + x'(t) - 20x(t) = -64(1 + t)e^{-4t}$,

$x''(t) + x'(t) - 20x(t) = 9e^{4t}$,

$x''(t) + x'(t) - 20x(t) = -205\cos 5t - 205\sin 5t$.

W pierwszym przypadku poszukamy rozwiązania w postaci $At^2 + Bt + C$. Podstawiając otrzymujemy

$1 - 200t^2 = 2A + 2At + B - 20(At^2 + Bt + C) = 2A + B - 20C + (2A - 20B)t - 20At^2$.

Wobec tego $A = 10$, $B = 1$ i $C = 1$, więc funkcja $x_1(t) = 10t^2 + t + 1$ jest rozwiązaniem pierwszego równania.

Tym razem szukamy rozwiązania w postaci $x(t) = w(t)e^{-4t}$. Różniczkujemy

$x'(t) = \big(w(t)e^{-4t}\big)' = \big(w'(t) - 4w(t)\big)e^{-4t}$,

$x''(t) = \big(w(t)e^{-4t}\big)'' = \big(w''(t) - 4w'(t) - 4w'(t) + 16w(t)\big)e^{-4t} =$

$= \big(w''(t) - 8w'(t) + 16w(t)\big)e^{-4t}$ i podstawiamy do równania:

$-64(1 + t)e^{-4t} = e^{-4t}\big(w''(t) - 8w'(t) + 16w(t) + w'(t) - 4w(t) - 20w(t)\big) =$

$= e^{-4t}\big(w''(t) - 7w'(t) - 8w(t)\big)$.

Niech $w(t) = At + B$. Wtedy $w''(t) = 0$, $w'(t) = A$ i wobec tego zachodzić ma równość $-8At - 7A - 8B = -64(1+t)$. Stąd $A = 8$, $B = 1$. Rozwiązaniem (jednym z wielu) jest funkcja $x_2(t) = (1 + 8t)e^{-4t}$.

Rozwiązania trzeciego równania szukamy w postaci $x(t) = w(t)e^{4t}$. Różniczkujemy:

$x'(t) = e^{4t}\big(w'(t) + 4w(t)\big)$,

$x''(t) = e^{4t}\big(w''(t)+4w'(t)+4w'(t)+16w(t)\big) = e^{4t}\big(w''(t)+8w'(t)+16w(t)\big)$. Podstawiamy do równania: $9e^{4t} = x''(t) + x'(t) - 20x(t) =$

$= e^{4t}\big(w''(t) + 8w'(t) + 16w(t) + w'(t) + 4w(t) - 20w(t)\big) = =e^{4t}\big(w''(t) + 9w'(t)\big)$. Niech więc $w(t) = at + b$. Wtedy $w''(t) = 0$ i $w'(t) = a$, zatem $9 = 9a$, czyli $a = 1$, natomiast b może być dowolne, np. $b = 0$. Funkcja $x_3(t) = te^{4t}$ jest szczególnym rozwiązaniem trzeciego równania.

Rozwiązania równania $x''(t) + x'(t) - 20x(t) = -205\cos 5t - 205\sin 5t$ poszukamy wśród funkcji postaci $x(t) = A\cos(5t)+B\sin(5t)$. Mamy $x'(t) = -5A\sin(5t)+5B\cos(5t)$, $x''(t) = -25A\cos(5t) - 25B\sin(5t)$, więc

$-205\cos 5t-205\sin 5t = x''(t)+x'(t)-20x(t) = (-45A+5B)\cos(5t)-(5A+45B)\sin(5t)$.

Wynikają stąd równości $-45A + 5B = -205$, $5A + 45B = 205$, więc $-9A + B = -41$, $A + 9B = 41$, zatem $82B = (9 - 1)\cdot 41 = 8\cdot 41$. Wynika stąd, że $B = \frac{8\cdot 41}{2\cdot 41} = 4$. $A = 41 - 9\cdot 4 = 5$. Funkcja $x_4(t) = 5\cos(5t) + 4\sin(5t)$. Rozwiązanie ogólne równania wygląda zatem tak $x(t) = x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) + x_4(t) + +c_1e^{-5t} + c_2e^{4t} =$

$= 10t^2 + t + 1 + (1 + 8t)e{-}4t + te^{4t} + 5\cos(5t) + 4\sin(5t) + c_1e^{-5t} + c_2e^{4t}$.

4. (3 pt.) Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$x''(t) + 4x'(t) + 13x(t) = 0$$

Pierwiastkami równania charakterystycznego $0 = \lambda^2 + 4\lambda + 13 = (\lambda + 2)^2 + 9$ są liczby $\lambda_1 = -2 - 3i$ oraz $\lambda_1 = -2 + 3i$. Wobec tego rozwiązanie ogólne równania jednorodnego wygląda więc tak $x(t) = e^{-2t}\,(c_1 \cos(3t) + c_2 \sin(3t))$. Może też być napisane w postaci zespolonej: $c_1 e^{-(2+3i)t} + c_2 e^{(-2+3i)t}$

(5 pt.) Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$x''(t) + 4x'(t) + 13x(t) = 13e^{-2t}\sin(3t) + 13e^{2t}\cos(3t) + 10\cos(3t) + 13\,.$$

Znajdziemy kolejno po jednym rozwiązaniu każdego z czterech równań:

$x''(t) + 4x'(t) + 13x(t) = 13e^{-2t}\sin(3t)\,,$

$x''(t) + 4x'(t) + 13x(t) = 13e^{2t}\cos(3t)\,,$

$x''(t) + 4x'(t) + 13x(t) = 10\cos(3t)\,,$

$x''(t) + 4x'(t) + 13x(t) = 13\,.$

Rozwiązania pierwszego równania szukać będziemy w postaci

$$x(t) = w(t)e^{-2t}\sin(3t) + v(t)e^{-2t}\cos(3t)\,.$$

Wtedy $x'(t) = w'(t)e^{-2t}\sin(3t) + v'(t)e^{-2t}\cos(3t) + w(t)(e^{-2t}\sin(3t))' + v(t)(e^{-2t}\cos(3t))'$,

$x''(t) = w''(t)e^{-2t}\sin(3t) + v''(t)e^{-2t}\cos(3t) + 2w'(t)(e^{-2t}\sin(3t))' + 2v'(t)(e^{-2t}\cos(3t))' +$

$+ w(t)(e^{-2t}\sin(3t))'' + v(t)(e^{-2t}\cos(3t))''$.

Wobec tego $x''(t) + 4x'(t) + 13x(t) = w''(t)e^{-2t}\sin(3t) + v''(t)e^{-2t}\cos(3t) +$

$+2w'(t)(e^{-2t}\sin(3t))' + 2v'(t)(e^{-2t}\cos(3t))' + 4w'(t)e^{-2t}\sin(3t) + 4v'(t)e^{-2t}\cos(3t) +$

$+w(t)(e^{-2t}\sin(3t))'' + v(t)(e^{-2t}\cos(3t))'' + 4\big(w(t)(e^{-2t}\sin(3t))' + v(t)(e^{-2t}\cos(3t))'\big) +$

$+13\big(w(t)e^{-2t}\sin(3t) + v(t)e^{-2t}\cos(3t)\big) =$

$= w''(t)e^{-2t}\sin(3t) + v''(t)e^{-2t}\cos(3t) + 2w'(t)(e^{-2t}\sin(3t))' + 2v'(t)(e^{-2t}\cos(3t))' +$

$+ 4w'(t)e^{-2t}\sin(3t) + 4v'(t)e^{-2t}\cos(3t) + 0 =$

$= \big(w''(t) - 6v'(t)\big)e^{-2t}\sin(3t) + \big(v''(t) + 6w'(t)\big)e^{-2t}\cos(3t) = 13e^{-2t}\sin(3t)$ — skorzystaliśmy po drodze z tego, że funkcje $e^{-2t}\cos(3t)$ i $e^{-2t}\sin(3t)$ są rozwiązaniami równania jednorodnego. Jest szansa na rozwiązanie, w którym $w(t) = At$ i $v(t) = Bt$. Wtedy $w''(t) = 0 = v''(t)$, $w'(t) = A$, $v'(t) = B$ i $-6B = 13$, więc $B = -\frac{13}{6}$, $6A = 0$, czyli $A = 0$. Funkcja $x_1(t) = -\frac{13}{6}\,t\,e^{-2t}\cos(3t)$ jest więc rozwiązaniem pierwszego równania.

Rozwiązujemy drugie równanie. Niech $x(t) = Ae^{2t}\sin(3t) + Be^{2t}\cos(3t)$. Mamy

$x'(t) = 2Ae^{2t}\sin(3t) + 2Be^{2t}\cos(3t) + 3Ae^{2t}\cos(3t) - 3Be^{2t}\sin(3t) =$

$= (2A - 3B)e^{2t}\sin(3t) + (3A + 2B)e^{2t}\cos(3t)$.

Następnie otrzymujemy $x''(t) = (-5A - 12B)e^{2t}\sin(3t) + (12A - 5B)Be^{2t}\cos(3t)$, stąd

$x''(t) + 4x'(t) + 13x(t) = (24A + 16B)e^{2t}\cos(3t) + (16A - 24B)e^{2t}\sin(3t) = 13e^{2t}\cos(3t)$.

Wynika stąd, że $24A + 16B = 13$ i $16A - 24B = 0$, czyli $2A = 3B$, więc $52B = 13$, czyli $B = \frac{1}{4}$, $A = \frac{3}{8}$. Funkcja $x_2(t) = \frac{1}{4}e^{2t}\cos(3t) + \frac{3}{8}e^{2t}\sin(3t)$ jest więc jednym z rozwiązań równania drugiego.

Znajdziemy rozwiązanie równania trzeciego postaci $x(t) = A\cos(3t) + B\sin(3t)$. Zachodzą wzory $x'(t) = -3A\sin(3t) + 3B\cos(3t)$, $x''(t) = -9A\cos(3t) - 9B\sin(3t)$. Wobec tego $x''(t)+4x'(t)+13x(t) = (4A+12B)\cos(3t) + (-12A+4B)\sin(3t)$, więc $4A+12B = 10$ i $-12A + 4B = 0$, zatem $A = \frac{1}{4}$, $B = \frac{3}{4}$. Funkcja $x_3(t) = \frac{1}{4}\cos(3t) + \frac{3}{4}\sin(3t)$ jest jednym z rozwiązań trzeciego równania.

Jasne jest, że funkcja $x_4(t) = 1$ jest rozwiązaniem czwartego równania. Rozwiązaniem ogólnym jest wobec tego funkcja

$x(t) = x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) + x_4(t) + e^{-2t}\,(c_1\cos(3t) + c_2\sin(3t)) = -\frac{13}{6}\,t\,e^{-2t}\cos(3t) +$

$+\frac{1}{4}e^{2t}\cos(3t) + \frac{3}{8}e^{2t}\sin(3t) + \frac{1}{4}\cos(3t) + \frac{3}{4}\sin(3t) + 1 + e^{-2t}\,(c_1\cos(3t) + c_2\sin(3t))$.

(2 pt.) Znaleźć rozwiązanie zagadnienia początkowego

$$\begin{cases} x''(t)+4x'(t)+13x(t)=13e^{-2t}\sin(3t)+13e^{2t}\cos(3t)+10\cos(3t)+13, \\ x(0)=\frac{3}{2}, \\ x'(0)=\frac{41}{24}. \end{cases}$$

Mamy $x(0)=\frac14+\frac14+1+c_1=\frac32$, zatem $c_1=0$. Podobnie (uwzględniając równość $c_1=0$) otrzymujemy $x'(0)=-\frac{13}{6}+\frac12+\frac98+\frac94+3c_2=\frac{41}{24}+c_2=\frac{41}{24}$, więc $c_2=0$. Rozwiązaniem jest funkcja $-\frac{13}{6}\,t\,e^{-2t}\cos(3t)++\frac14 e^{2t}\cos(3t)+\frac38 e^{2t}\sin(3t)+\frac14\,\cos(3t)+\frac34\,\sin(3t)+1$.

---

5. (5 pt.) Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$x''(t)+4x'(t)+4x(t)=0\,.$$

Pierwiastkami równania charakterystycznego $0=\lambda^2+4\lambda+4=(\lambda+2)^2$ są liczby $\lambda_1=\lambda_2=-2$ (więc tylko jedna liczba, która jest pierwiastkiem podwójnym tego wielomianu). Rozwiązanie ogólne ma więc postać $(c_1+c_2t)e^{-2t}$.

(5 pt.) Znaleźć rozwiązanie ogólne równania $\quad x''(t)+4x'(t)+4x(t)=\dfrac{2t(t^2-3)}{(t^2+1)^3}\,e^{-2t}$.

Najpierw poszukamy rozwiązania w postaci $x(t)=w(t)e^{-2t}$, choć tym razem istnienie takiego rozwiązania nie wynika z poznanych twierdzeń. Zachodzą równości
$x'(t)=(w'(t)-2w(t))e^{-2t}$ i $x''(t)=\big(w''(t)-2w'(t)-2(w'(t)-2w(t))\big)e^{-2t}=\big(w''(t)-4w'(t)+4w(t)\big)e^{-2t}$.
Otrzymujemy równość

$\frac{2t(t^2-3)}{(t^2+1)^3}\,e^{-2t}=\big(w''(t)-4w'(t)+4w(t)+4w'(t)-8w(t)+4w(t)\big)e^{-2t}=\big(w''(t)\big)e^{-2t}$, z której wynika, że

$w''(t)=\frac{2t(t^2-3)}{(t^2+1)^3}$. Wobec tego

$w'(t)=\int\frac{2t(t^2-3)}{(t^2+1)^3}\,dt \overset{y=t^2+1}{\underset{dy=2t\,dt}{=\!=\!=}} \int\frac{y-4}{y^3}\,dy=\int(y^{-2}-4y^{-3})\,dy=-y^{-1}+2y^{-2}+C_1=\frac{-1}{t^2+1}+\frac{2}{(t^2+1)^2}+C_1$.

Scałkujemy funkcję w'. Mamy $\int\left(\frac{-1}{t^2+1}+\frac{2}{(t^2+1)^2}+C_1\right)dt=\int\left(\frac{-1}{t^2+1}+\frac{2(t^2+1)}{(t^2+1)^2}\right)dt-\int t\cdot\frac{2t}{(t^2+1)^2}\,dt+C_1t=$

$=C_1t++\operatorname{arctg}t+\frac{t}{t^2+1}-\int\frac{1}{t^2+1}\,dt=C_1t+\frac{t}{t^2+1}+C_2$. Wynika stąd, że rozwiązaniem ogólnym jest funkcja $x(t)=\frac{t}{t^2+1}e^{-2t}+(C_1t+C_2)e^{-2t}$. **Zadanie zostało rozwiązane**.

Można było **uzmiennić stałe** w rozwiązaniu ogólnym (metoda przedstawiona 19 maja w czasie, gdy większość studentów zapewne smacznie sobie śpi lub spokojnie rozważa kwestię opuszczenia bezpiecznego, cieplutkiego łóżeczka ...)
Szukamy rozwiązania w postaci $x(t)=c_1(t)e^{-2t}+c_2(t)te^{-2t}$. Prowadzi to do wzoru

$$x'(t)=c_1'(t)e^{-2t}+c_2'(t)te^{-2t}+c_1(t)\big(e^{-2t}\big)'+c_2(t)\big(te^{-2t}\big)'.$$

Znajdziemy funkcje c_1,c_2 spełniające dodatkowy, sztucznie dopisany warunek $c_1'(t)e^{-2t}+c_2'(t)te^{-2t}=0$.
Dzięki temu założeniu upraszcza się pochodna szukanego rozwiązania

$x'(t)=c_1(t)\big(e^{-2t}\big)'+c_2(t)\big(te^{-2t}\big)'$, a druga pochodna przyjmuje postać

$x''(t)=c_1'(t)\big(e^{-2t}\big)'+c_2'(t)\big(te^{-2t}\big)'+c_1(t)\big(e^{-2t}\big)''+c_2(t)\big(te^{-2t}\big)''$. Mamy więc

$$\frac{2t(t^2-3)}{(t^2+1)^3}\,e^{-2t}=x''(t)+4x'(t)+4x(t)=c_1'(t)\big(e^{-2t}\big)'+c_2'(t)\big(te^{-2t}\big)'+c_1(t)\Big(\big(e^{-2t}\big)''++4\big(e^{-2t}\big)'+4e^{-2t}\Big)+$$
$$+c_2(t)\Big(\big(te^{-2t}\big)''+4\big(te^{-2t}\big)'+4te^{-2t}\Big)=c_1'(t)\big(e^{-2t}\big)'+c_2'(t)\big(te^{-2t}\big)'$$

— skorzystaliśmy z tego, że funkcje e^{-2t} i te^{-2t} są rozwiązaniami równania jednorodnego. Otrzymaliśmy

układ równań $\begin{cases} c_1'(t)e^{-2t}+c_2'(t)te^{-2t}=0, \\ c_1'(t)\big(e^{-2t}\big)'+c_2'(t)\big(te^{-2t}\big)'=\frac{2t(t^2-3)}{(t^2+1)^3}\,e^{-2t}. \end{cases}$ Drugie równanie można zapisać w postaci

$-2c_1'(t)e^{-2t}-2c_2'(t)te^{-2t}+c_2'(t)e^{-2t}=\frac{2t(t^2-3)}{(t^2+1)^3}\,e^{-2t}$, co po uwzględnieniu pierwszego równaniu wygląda tak $c_2'(t) = \frac{2t(t^2-3)}{(t^2+1)^3}$. Bez trudu znajdujemy

$$c_2(t) = \int \frac{2t(t^2-3)}{(t^2+1)^3}\,dt \ \overline{\underline{\ y=t^2+1\ }}_{\,dy=2t\,dt} = \int \frac{y-4}{y^3}\,dy = \int \left(y^{-2} - 4y^{-3}\right)dy = -y^{-1} + 2y^{-2} = \frac{-1}{t^2+1} + \frac{2}{(t^2+1)^2} + \text{const}\,.$$

To jeszcze nie koniec. Mamy $c_1'(t) = -tc_2'(t) = \frac{-2t^2(t^2-3)}{(t^2+1)^3}$. Przedstawimy tę funkcję jako sumę ułamków prostych

$$c_1'(t) = \frac{-2t^2(t^2-3)}{(t^2+1)^3} = \frac{-2((t^2+1)^2-5(t^2+1)+4)}{(t^2+1)^3} = \frac{-2}{t^2+1} + \frac{10}{(t^2+1)^2} - \frac{8}{(t^2+1)^3}\,.$$

Teraz scałkujemy tę funkcję. Mamy

$$\int \frac{1}{(t^2+1)^3}\,dt = \int \frac{t^2+1}{(t^2+1)^3}\,dt - \int t\cdot \frac{t}{(t^2+1)^3}\,dt = \int \frac{1}{(t^2+1)^2}\,dt - \int t\cdot\left(t(t^2+1)^{-3}\right)dt =$$

$$= \int \frac{1}{(t^2+1)^2}\,dt + \frac{1}{4}t(t^2+1)^{-2} - \frac{1}{4}\int (t^2+1)^{-2}\,dt = \frac{3}{4}\int \frac{1}{(t^2+1)^2}\,dt + \frac{t}{4(t^2+1)^2}\,.$$

Analogicznie

$$\int \frac{1}{(t^2+1)^2}\,dt = \int \frac{t^2+1}{(t^2+1)^2}\,dt - \int t\cdot \frac{t}{(t^2+1)^2}\,dt = \int \frac{1}{t^2+1}\,dt - \int t\cdot\left(t(t^2+1)^{-2}\right)dt =$$

$$= \int \frac{1}{t^2+1}\,dt + \frac{1}{2}t(t^2+1)^{-1} - \frac{1}{2}\int (t^2+1)^{-1}\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2+1}\,dt + \frac{t}{2(t^2+1)} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t + \frac{t}{2(t^2+1)} + \text{const}\,.$$

Z ostatnich dwu równości wynika, że $\int \frac{1}{(t^2+1)^3}\,dt = \frac{t}{4(t^2+1)^2} + \frac{3}{8}\operatorname{arctg} t + \frac{3t}{8(t^2+1)} + \text{const}$. Możemy w końcu obliczyć c_1 . Otrzymujemy

$$c_1(t) = \int \left(\frac{-2}{t^2+1} + \frac{10}{(t^2+1)^2} - \frac{8}{(t^2+1)^3}\right)dt = -2\operatorname{arctg} t + 10\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg} t + \frac{t}{2(t^2+1)}\right) -$$

$$-8\left(\frac{t}{4(t^2+1)^2} + \frac{3}{8}\operatorname{arctg} t + \frac{3t}{8(t^2+1)}\right) + \text{const} = \frac{2t}{t^2+1} - \frac{2t}{(t^2+1)^2} + \text{const}\,.$$

Mamy więc rozwiązanie szczególne $\left(\frac{2t}{t^2+1} - \frac{2t}{(t^2+1)^2}\right)e^{-2t} + \left(\frac{-1}{t^2+1} + \frac{2}{(t^2+1)^2}\right)te^{-2t} = \frac{t}{t^2+1}\cdot e^{-2t}$, a stąd też i ogólne $\frac{t}{t^2+1}\cdot e^{-2t} + (c_1 + c_2 t)e^{-2t}$
