Matematyka A, kolokwium 2, 30 kwietnia 2014, 18:15 — 20:00

Mam nadzieję, że nie ma tu wielu błędów i będę wdzięczny każdej osobie za ich wskazanie.

1. (10 pt.) Przedstawić w postaci $x+yi$, $x,y\in\mathbb{R}$ liczby $(2-i)(3-4i)(1-2i)$, $\frac{75-25i}{4-3i}$ oraz

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)^{13}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)^{28}.$$

Rozwiązanie.

$(2-i)(3-4i)(1-2i)=-i(2-i)(3-4i)(2+i)=-\cdot(2^2-i^2)(3i+4)=-5(3i+4)=-20-15i$.

$\frac{75-25i}{4-3i}=\frac{(75-25i)(4+3i)}{(4-3i)(4+3i)}=\frac{(75-25i)(4+3i)}{4^2-(3i)^2}=\frac{(75-25i)(4+3i)}{16-(-9)}=\frac{(75-25i)(4+3i)}{25}=(3-i)(4+3i)=15+5i$.

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)^{13}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)^{28}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)^{13}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)^{13}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)^{15}=$$

$$=\left(\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\tfrac{i}{2}\right)^2\right)^{13}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)^{15}=\left(\tfrac{3}{4}-\left(-\tfrac{1}{4}\right)\right)^{13}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)^{15}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)^{15}=$$

$$=\left(\tfrac{3}{4}-\tfrac{i}{2}\sqrt{3}-\tfrac{1}{4}\right)^7\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)=\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{i}{2}\sqrt{3}\right)^7\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)=\left(\tfrac{1}{4}-\tfrac{i}{2}\sqrt{3}-\tfrac{3}{4}\right)^3\cdot\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{i}{2}\sqrt{3}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)=$$

$$=\left(-\tfrac{1}{2}-\tfrac{i}{2}\sqrt{3}\right)^3\cdot\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{i}{2}\sqrt{3}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)=\left(\tfrac{1}{4}+\tfrac{i}{2}\sqrt{3}-\tfrac{3}{4}\right)\left(-\tfrac{1}{2}-\tfrac{i}{2}\sqrt{3}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{i}{4}-\frac{3i}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)=$$

$=\left(-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\sqrt{3}\right)\left(-\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\sqrt{3}\right)(-i)=-i\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right)=-i$ — to był rachunek oparty o wzory $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, $i^2=-1$ oraz $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$. Zadanie zostało rozwiązane.

Uwaga dla tych osób, które akceptują trygonometrię i wzór de Moivre'a. Mamy

$\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}=\cos(-\frac{\pi}{6})+i\sin(-\frac{\pi}{6})$. Wobec tego

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)^{13}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)^{28}=\left(\cos\tfrac{\pi}{6}+i\sin\tfrac{\pi}{6}\right)^{13}\cdot\left(\cos(-\tfrac{\pi}{6})+i\sin(-\tfrac{\pi}{6})\right)^{28}=$$

$$=\left(\cos\tfrac{13\pi}{6}+i\sin\tfrac{13\pi}{6}\right)\cdot\left(\cos(-\tfrac{28\pi}{6})+i\sin(-\tfrac{28\pi}{6})\right)=\cos(-\tfrac{15\pi}{6})+i\sin(-\tfrac{15\pi}{6})$$
$$=\cos(-\tfrac{5\pi}{2})+i\sin(-\tfrac{5\pi}{2})=\cos(-2\pi-\tfrac{\pi}{2})+i\sin(-2\pi-\tfrac{\pi}{2})=\cos(-\tfrac{\pi}{2})+i\sin(-\tfrac{\pi}{2})=-i.$$

---

2. (5 pt.) Obliczyć $e^{1683\pi i}$, $e^{1683\pi i/4}$, $e^{-1683\pi i/6}$.

Rozwiązanie

Przypomnienie: $e^{i\alpha}=\cos\alpha+i\sin\alpha$, $e^{2\pi i}=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1$ — akurat te równości należy mieć w głowie, zresztą druga wynika od razu z pierwszej. Mamy więc

$e^{1683\pi i}=e^{1682\pi i}\cdot e^{\pi i}=e^{\pi i}=\cos(\pi)+i\sin(\pi)=-1$.

$e^{1683\pi i/4}=e^{420\pi i}\cdot e^{3\pi i/4}=e^{3\pi i/4}=\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}=-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}$

$e^{-1683\pi i/6}=e^{-280\pi i}\cdot e^{-3\pi i/6}=e^{-\pi i/2}=\cos(-\frac{\pi}{2})+i\sin(-\frac{\pi}{2})=-i$.

(5 pt.) Wykazać, że jeśli $e^z=z$, to $\mathrm{Re}\,z>0$.

Rozwiązanie

Niech $z=x+yi$, $x,y\in\mathbb{R}$. Mamy $e^z=e^x(\cos y+i\sin y)$. Z równości $e^z=z$ wynikają więc równania $e^x\cos y=x$ oraz $e^x\sin y=y$. Jeśli $y=0$, to pierwsze równanie nie jest spełnione, bo $e^x\cos 0=e^x\geq 1+x>x$. Jeśli $y\neq 0$, to $|\sin y|<|y|$, jeśli $x\leq 0$, to $e^x\leq e^0=1$. Wobec tego jeśli $x\leq 0\neq y$, to $|e^x\sin y|=e^x|\sin y|<1\cdot|y|=|y|$, a to znaczy, że drugie równanie nie jest spełnione.

Uwaga Równanie $e^z=z$ nie ma rzeczywistych rozwiązań, co wykazaliśmy „po drodze". Nierzeczywistych ma nieskończenie wiele, np. liczby $z_1\approx 0.31813150520476413+1.3372357014306895\,i$ i $z_{-1}\approx 0.31813150520476413-1.3372357014306895\,i$ są rozwiązaniami tego równania. Tych rozwiązań nie da się zapisać za pomocą funkcji elementarnych.

---

3. (10 pt.) Rozwiązać równanie $z^{12} + z^{10} + z^8 + 65z^6 + 64z^4 + 64z^2 + 64 = 0$, tzn. znaleźć wszystkie zespolone rozwiązania tego równania.

Rozwiązanie.

$z^{12} + z^{10} + z^8 + 65z^6 + 64z^4 + 64z^2 + 64 = z^{12} + z^{10} + z^8 + z^6 + 64z^6 + 64z^4 + 64z^2 + 64 =$
$= z^6(z^6 + z^4 + z^2 + 1) + 64(z^6 + z^4 + z^2 + 1) = (z^6 + 64)(z^6 + z^4 + z^2 + 1) = (z^6 + 64)(z^4 + 1)(z^2 + 1)$
zatem $z^{12} + z^{10} + z^8 + 65z^6 + 64z^4 + 64z^2 + 64 = 0 \iff z^6 = -64 = 2^6(\cos\pi + i\sin\pi)$ lub $z^4 = -1 = \cos\pi + i\sin\pi$, lub $z^2 = -1 = \cos\pi + i\sin\pi$. Wobec tego z jest jedną z następujących dwunastu liczb: $2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}) = \sqrt{3} + i$, $2(\cos\frac{2\pi+\pi}{6} + i\sin\frac{2\pi+\pi}{6}) = 2(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) = 2i$,
$2(\cos\frac{4\pi+\pi}{6} + i\sin\frac{4\pi+\pi}{6}) = 2(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}) = -\sqrt{3} + i$,
$2(\cos\frac{6\pi+\pi}{6} + i\sin\frac{6\pi+\pi}{6}) = 2(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}) = -\sqrt{3} - i$,
$2(\cos\frac{8\pi+\pi}{6} + i\sin\frac{8\pi+\pi}{6}) = 2(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}) = -2i$,
$2(\cos\frac{10\pi+\pi}{6} + i\sin\frac{10\pi+\pi}{6}) = 2(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}) = \sqrt{3} - i$, $\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$,
$\cos\frac{2\pi+\pi}{4} + i\sin\frac{2\pi+\pi}{4} = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}$, $\cos\frac{4\pi+\pi}{4} + i\sin\frac{4\pi+\pi}{4} = \frac{-1-i}{\sqrt{2}}$, $\cos\frac{6\pi+\pi}{4} + i\sin\frac{6\pi+\pi}{4} = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$, i, $-i$.

Uwaga. Można też było rozwiązywać równania $z^4 + 1 = 0$ i $z^6 + 64 = 0$ bez trygonometrii. Oczywiście $z^4 = -1 = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $z^2 = i$ lub $z^2 = -i$. Przyjmimy, że $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$. Mamy więc $i = (x + yi)^2 = x^2 + 2xyi - y^2$ lub $-i = (x + yi)^2 = x^2 + 2xyi - y^2$. Oznacza to, że $x^2 - y^2 = 0$ oraz $2xy = 1$ w pierwszym przypadku i $x^2 - y^2 = 0$ oraz $2xy = -1$ — w drugim. Z równości $x^2 = y^2$ wynika, że $x = y$ lub $x = -y$. Stąd $2x^2 = 1$ lub $-2x^2 = 1$ w pierwszym przypadku oraz $2x^2 = -1$ lub $-2x^2 = -1$ — w drugim. Ponieważ $2x^2 \geq 0$, więc $x^2 = \frac{1}{2}$. Stąd $x = y = \frac{1}{\sqrt{2}}$ lub $x = y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, czyli $z = \pm\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ w pierwszym przypadku oraz $x = -y = \frac{1}{\sqrt{2}}$ lub $x = y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, czyli $z = \pm\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ — w drugim.

Niech $z^6 = -64$. Niech $z^2 = u + iv$, $u, v \in \mathbb{R}$. Wobec tego zachodzą równości: $-64 = z^6 = (u + iv)^3 = u^3 + 3iu^2v - 3uv^2 - iv^3 = u^3 - 3uv^2 + i(3u^2v - v^3)$, zatem $u^3 - 3uv^2 = -64$ oraz $0 = 3u^2v - v^3 = v(3u^2 - v^2)$. Wynika stąd, że $v = 0$ i wtedy $u^3 = -64$, czyli $u = -4$ lub $v^2 = 3u^2$ i wtedy $-64 = u^3 - 9u^3 = -8u^3$, zatem $8 = u^3$, tzn. $u = 2$, wtedy $v = \pm 2\sqrt{3}$. Mamy do rozważenia trzy równania $z^2 = -4$, $z^2 = 2 + 2i\sqrt{3}$ i $z^2 = 2 - 2i\sqrt{3}$. Niech $z = x + yi$, czyli $z^2 = x^2 + 2xyi - y^2$.

W pierwszym przypadku mamy $x^2 - y^2 = -4$ i $2xy = 0$, zatem $y = 0$ i wtedy $x^2 = -4$ wbrew temu, że $x^2 \geq 0$ albo $x = 0$ i wtedy $-y^2 = -4$, czyli $y = \pm 2$, co oznacza, że $z = \pm 2i$.

W drugim przypadku mamy $x^2 - y^2 = 2$ i $2xy = 2\sqrt{3}$, zatem $y = \frac{\sqrt{3}}{x}$ i wtedy $x^2 - \frac{3}{x^2} = 2$, zatem $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$ i oczywiście $x^2 \geq 0$, więc $x^2 = 3$, czyli $x = \pm\sqrt{3}$ i wtedy $y = \pm 1$, a to oznacza, że $z = \pm(\sqrt{3} + i)$.

W trzecim przypadku mamy $x^2 - y^2 = 2$ i $2xy = -2\sqrt{3}$, zatem $y = -\frac{\sqrt{3}}{x}$ i wtedy $x^2 - \frac{3}{x^2} = 2$, zatem $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$ i oczywiście $x^2 \epsilon 0$, więc $x^2 = 3$, czyli $x = \pm\sqrt{3}$ i wtedy $y = \mp 1$, a to oznacza, że $z = \pm(\sqrt{3} - i)$.

4. (4 pt.) Znaleźć rozwiązanie ogólne równania $t^3x(t)x'(t) = 4 - (x(t))^2$.

Rozwiązanie.

Przepisujemy równanie w wersji $\dfrac{x'(t)x(t)}{4-x^2(t)} = t^{-3}$. Całkujemy obie strony:

$$\int \frac{x'(t)x(t)}{4-x^2(t)}\,dt = \int \frac{x}{4-x^2}\,dx \xrightarrow[du=-2x\,dx]{u=4-x^2} -\frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,du = -\frac{1}{2}\ln|u| + \text{const} = -\frac{1}{2}\ln|4-x^2| + \text{const}\,,$$

$\displaystyle\int t^{-3}\,dt = -\frac{1}{2}t^{-2} + \text{const}$, zatem $\ln|4-x^2| = t^{-2} + \text{const}$, więc $4 - x^2 = Ce^{t^{-2}}$, $C \in \mathbb{R}$ — liczba C może być ujemna („zapomnieliśmy” o $|\ |$, może też być zerem, bo funkcje stale równe 2 oraz -2 też są rozwiązaniami, choć nie wolno dzielić przez 0). Wobec tego $x(t) = \pm\sqrt{4 - Ce^{t^{-2}}}$.

Uwaga. Można też przedstawić funkcję $\frac{x}{4-x^2} = \dfrac{x}{(2-x)(2+x)}$ w postaci sumy ułamków prostych: $\dfrac{x}{(2-x)(2+x)} = \dfrac{A}{2-x} + \dfrac{B}{2+x} = \dfrac{2A+2B+(A-B)x}{(2-x)(2+x)}$. Ta równość zachodzi dla każdego $x \neq \pm 2$ wtedy i tylko wtedy, gdy $2A + 2B = 0$ i $A - B = 1$, tzn. gdy $A + \frac{1}{2}$ i $B = -\frac{1}{2}$.
Stąd $\int \frac{x}{4-x^2}\,dx == \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{2-x} - \frac{1}{2+x}\right)dx = \frac{1}{2}\big(-\ln|2-x| - \ln|2+x|\big) = -\frac{1}{2}\ln|4-x^2|$.

(3 pt.) Znaleźć takie rozwiązanie równania $t^3x(t)x'(t) = 4 - (x(t))^2$, że $x(1) = 1$.

Rozwiązanie.

Ma być spełniona równość $1 = x(1) = \pm\sqrt{4 - Ce^{1^{-2}}}$. Wobec tego trzeba wybrać $+$ oraz $C = \frac{3}{e}$.
Otrzymujemy $x(t) = \sqrt{4 - 3e^{-1+t^{-2}}}$.

(3 pt.) Znaleźć takie rozwiązanie równania $t^3x(t)x'(t) = 4 - (x(t))^2$, że $x(1) = 2$.

Rozwiązanie.

Już je wskazaliśmy w pierwszej części rozwiązania: $x(t) = 2$ dla każdej liczby $t \in \mathbb{R}$. To jedyne rozwiązanie. Wynika to z twierdzenia o jednoznaczności rozwiązań równania $x'(t) = \frac{1}{t^3} \cdot \frac{4-x(t)^2}{x(t)}$ — funkcja $t \mapsto \frac{1}{t^3}$ jest ciągła, a funkcja $x \mapsto \frac{4-x(t)^2}{x(t)}$ jest różniczkowalna w sposób ciągły.

---

5. W ciągu 10 minut temperatura herbaty w szklance zmalała ze 100° C do 40° C. Temperatura powietrza w pomieszczeniu jest równa 25° C.
Po jakim czasie temperatura herbaty zmniejszy się do 35° C?
Obowiązuje prawo stygnięcia sformułowane przez Newtona: *„ szybkość zmniejszania się temperatury układu jest proporcjonalna do różnicy temperatur pomiędzy układem a otoczeniem.”*

Rozwiązanie.

Niech $x(t)$ oznacza temperaturę herbaty w chwili t. Mamy więc $x(0) = 100$, $x(10) = 40$. Szybkość zmian funkcji (w chwili t) to jej pochodna (w chwili t). Mamy więc $x'(t) = \lambda(x(t) - 25)$, gdzie litera λ oznacza współczynnik proporcjonalności, o którym mówi wspomniane prawo stygnięcia.

Mamy więc $\lambda t + \text{const} = \int \lambda\,dt = \int \frac{x'(t)}{x(t)-25}\,dt = \int \frac{1}{x-25}\,dx = \ln|x-25| + \text{const}$. Stąd wynika, że zachodzi równość $x - 25 = \pm e^{\lambda t + \text{const}} = \pm e^{\text{const}}e^{\lambda t} = Ce^{\lambda t}$, gdzie C oznacza stałą $\pm e^{\text{const}}$.
Rozwiązując równanie różniczkowe $x'(t) = \lambda(x(t) - 25)$ dopuścilibyśmy również $C = 0$, ale w wypadku temperatury stygnącej herbaty funkcja stale równa 25 nie wchodzi oczywiście w grę.
Mamy $100 = x(0) = 25 + Ce^{\lambda\cdot 0} = 25 + C$, zatem $40 = x(10) = 25 + 75e^{\lambda\cdot 10}$, więc $e^{\lambda\cdot 10} = \frac{15}{75} = \frac{1}{5}$.

Wobec tego $\lambda = \frac{1}{10}\ln\frac{1}{5} = -\frac{1}{10}\ln 5$. Wynika stąd, że $x(t) = 25 + 75e^{-t/10\cdot\ln 5} = 25 + 75\left(\frac{1}{5}\right)^{t/10}$.
Jeżeli $35 = x(t) = 25 + 75e^{-t/10\cdot\ln 5}$, to $\ln\frac{10}{75} = -\frac{t}{10}\cdot\ln 5$, więc $t = 10\frac{\ln 7{,}5}{\ln 5}$.
Uwaga. Używszy np. kalkulatora można przekonać się, że $10\frac{\ln 7{,}5}{\ln 5} \approx 12{,}52$ minuty.
