

Matematyka A, kolokwium 1, 26 marca 2014, 18:30 — 20:05

Rozwiązania różnych zadań mają znaleźć się na różnych kartkach, bo sprawdzą je różne osoby.

Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU imieniem i nazwiskiem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia.

Nie wolno korzystać z urządzeń elektronicznych (kalkulatorów, telefonów komórkowych itp.); posiadane muszą być schowane i wyłączone! Nie dotyczy rozruszników serca.

Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały udowodnione na wykładzie lub na ćwiczeniach.

Należy przeczytać **CAŁE** zadanie **PRZED** rozpoczęciem rozwiązywania go!

1. (5 pt.) Obliczyć $\int_0^1 \frac{1}{(x-2)^3(x-3)^2} dx$.

(5 pt.) Obliczyć $\int_0^1 \frac{x^3}{(2-x)^{2603}} dx$.

2. Niech $A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2: \frac{3}{2} \leq x \text{ i } \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1 \right\}$.

(5 pt.) Naszkicować zbiór A na płaszczyźnie i obliczyć jego pole.

(5 pt.) Obliczyć pierwszą współrzędną środka ciężkości zbioru A .

3. (10 pt.) Znaleźć objętość bryły, która powstała w wyniku obrotu wokół osi OX wykresu funkcji $y = x \sin x$, $0 \leq x \leq \pi$,

4. (10 pt.) Obliczyć pole powierzchni, która powstała w wyniku obrotu o kąt 2π wykresu funkcji $y = 3 - \sqrt{4 - (x-5)^2}$, $3 \leq x \leq 5$ wokół osi OX .

5. Niech $f(x) = \frac{1}{3}x^{3/2}$ dla $x \in [0, 5]$. Niech $C = (a, b)$ będzie środkiem ciężkości wykresu funkcji f .

(2 pt.) Znaleźć długość wykresu funkcji f .

(3 pt.) Znaleźć pierwszą współrzędną a środka ciężkości wykresu funkcji f .

(2 pt.) Obliczyć pochodną funkcji $\frac{1}{2}(x+2)\sqrt{x^2+4x} - 2 \ln(x+2+\sqrt{x^2+4x})$. **UPROŚCIĆ!**

(3 pt.) Znaleźć drugą współrzędną, czyli b , środka ciężkości wykresu funkcji f .

Ciekawostki (któż wie, co się może przydać): $x\sqrt{1+\frac{x}{4}} = \frac{x}{2}\sqrt{x+4} = \frac{1}{2}((x+4)^{3/2} - 4(x+4)^{1/2})$,
 $3^6 = 729$, $2^9 = 512$, $2^{12} = 4096$, $2^{16} = 65536$, $2^{19} = 524288$, $7^2 = 49$, $7^4 = 2401$, $51^2 = 2601$,
 $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$, $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$, $52^2 = 2704$, $53^2 =$
 2809 , $54^2 = 2916$, $64^2 = 4096$, $65^2 = 4225$, $66^2 = 4356$, $67^2 = 4489$, $666^2 = 443556$, $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$,
 $\cos \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}$, $\sin \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $(x-2) - (x-3) = 1$, $x = (x-2) + 2$, $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.