Matematyka A, egzamin, 19 lutego 2014, 10:05 – 13:05

Rozwiązania kolejnych zadań należy pisać na różnych kartkach, bo sprawdzać je będą różne osoby. Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU imieniem i nazwiskiem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia.

Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, musi wyłączyć i schować! Nie dotyczy rozruszników serca.

Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały *udowodnione* na wykładzie lub na ćwiczeniach.

Należy przeczytać **CAŁE** zadanie **PRZED** rozpoczęciem rozwiązywania go!

---

1. 3 pt. Zdefiniować $\log_d c$ pamiętając o założeniach o c i d.

7 pt. Rozwiązać równanie $\log_{10}(6-x)+\log_{10}(2-x)+\frac{1}{3}\log_{10}\frac{1}{7\cdot 49}=1+2\log_{10}2-\frac{1}{5}\log_{10}(x+10)^5$.

---

2. 3 pt. Podać definicję kosinusa, sinusa i tangensa dowolnego kąta dodatniego.

4 pt. Rozwiązać nierówność $2\sin t+\frac{1}{\sin t}<-3$.

3 pt. Zilustrować jej rozwiązanie na okręgu $x^2+y^2=1$.

---

3. 10 pt. Na paraboli o równaniu $y=\frac{1}{2}x^2$ znaleźć punkt (x_0,y_0) leżący najbliżej punktu $(-24,15)$.

---

4. Niech $f(x)=\sqrt[5]{x^4(x-1)^6(x+1)}$. Dla $x\notin\{-1,0,1\}$ zachodzą wtedy równości:

$f'(x)=\frac{1}{5}x^{-1/5}(x-1)^{1/5}(x+1)^{-4/5}(11x^2+5x-4)$ oraz

$f''(x)=\frac{2}{25}x^{-6/5}(x-1)^{-4/5}(x+1)^{-9/5}(33x^4+30x^3-29x^2-20x-2)$.

$11x^2+5x-4=0\iff x=x_1=\frac{1}{22}(-5-\sqrt{21})\approx -0{,}87$, $x=x_2=\frac{1}{22}(-5+\sqrt{21})\approx 0{,}42$

$33x^4+30x^3-29x^2-20x-2=0\iff x=x_3\approx -1{,}26$, $x=x_4\approx -0{,}43$, $x=x_5\approx -0{,}13$ lub $x=x_6\approx 0{,}9$.

2 pt. Rozstrzygnąć, czy istnieją pochodne $f'(-1)$, $f'(0)$, $f'(1)$. Istniejące obliczyć.

2 pt. Znaleźć te przedziały, na których funkcja f maleje oraz te, na których rośnie.

2 pt. Znaleźć te przedziały, na których funkcja f jest wypukła oraz te, na których jest wklęsła.

4 pt. Naszkicować wykres funkcji f korzystając z uzyskanych informacji.

---

5. (10 pt.) Obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\big(1+\operatorname{tg}(\sin(2x))\big)\cdot\big((1+\frac{2}{3}x^2)^{1,5}-\cos(x\sqrt{2})-2\operatorname{tg}^2(x)\big)\cdot\cos(x^7)}{x\operatorname{ctg}(3x)\cdot\big(\operatorname{tg}(3x)-\sin(3x)+\ln\sqrt{1-27x^3}\big)}$.

---

6. Niech $A=(0,0,0)$, $B_1=(10,5,3)$, $D_1=(8,7,1)$, $C=(2,4,2)$, równoległoboki ABB_1A_1, $ABCD$, oraz ADD_1A_1 są ścianami równoległościanu $ABCDA_1B_1C_1D_1$, odcinki AA_1, BB_1, CC_1 i DD_1 są równoległymi krawędziami tego równoległościanu.

2 pt. Znaleźć współrzędne wierzchołków B, D, A_1 i C_1 równoległościanu $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

2 pt. Znaleźć pole trójkąta D_1DB.

2 pt. Znaleźć równanie płaszczyzny BB_1D_1.

2 pt. Znaleźć objętość graniastosłupa $A_1ABB_1D_1D$.

2 pt. Znaleźć długości odcinków AB i BC oraz kąt α między wektorami $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{BD}$.

Ciekawostki (kto wie, co się przyda): $\operatorname{tg}x=x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\frac{17}{315}x^7+\ldots$, gdy $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$,

$(1+x)^a=1+ax+\binom{a}{2}x^2+\binom{a}{3}x^3+\cdots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n}x^n$ oraz $\ln(1-x)=-\left(x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{4}x^4+\ldots\right)$

dla $x\in(-1,1)$, $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ dla $x\in\mathbb{R}$, $\big(\sin x\big)'=\cos x$.