Matematyka A, egzamin, 4 lutego 2014, 10:05 – 13:05

Rozwiązania kolejnych zadań należy pisać na różnych kartkach, bo sprawdzać je będą różne osoby. Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU imieniem i nazwiskiem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia.

Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, musi wyłączyć i schować! Nie dotyczy rozruszników serca.

Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały *udowodnione* na wykładzie lub na ćwiczeniach.

Należy przeczytać **CAŁE** zadanie **PRZED** rozpoczęciem rozwiązywania go!

---

1. 3 pt. Zdefiniować $\log_z y$ pamiętając o założeniach o z i y.

7 pt. Rozwiązać równanie $\log_{10}(x+2) + \frac{1}{3}\log_{10}(x-6)^3 + \log_{10}\frac{27}{81} = \frac{\log_{10} 49}{\log_{10} 7} - 2\log_{10}\sqrt{x+7}$.

---

2. 3 pt. Podać definicję kosinusa, sinusa i tangensa dowolnego kąta dodatniego.

4 pt. Rozwiązać nierówność $\operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t < -2$.

3 pt. Zilustrować jej rozwiązanie na okręgu $x^2 + y^2 = 1$.

---

3. 10 pt. Na krzywej o równaniu $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ (nazywanej elipsą) znaleźć punkt (x_0, y_0) leżący najbliżej punktu $(1, 0)$.

---

4. Niech $f(x) = \frac{1}{(x^2+4)^2}\sqrt[3]{x(x^2-1)^2}$. Dla $x \notin \{-1, 0, 1\}$ zachodzą wtedy równości:

$f'(x) = -\frac{1}{3}(4 - 31x^2 + 7x^4)x^{-2/3}(-1+x^2)^{-1/3}(4+x^2)^{-3}$ oraz

$f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-5/3}(-1+x^2)^{-4/3}(4+x^2)^{-4}(16 + 256x^2 - 525x^4 + 388x^6 - 35x^8)$.

$4 - 31x^2 + 7x^4 = 0 \iff x = x_1 \approx -2{,}07$, $x = x_2 \approx -0{,}36$, $x = x_3 \approx 0{,}36$ lub $x = x_4 \approx 2{,}07$,

$16 + 256x^2 - 525x^4 + 388x^6 - 35x^8 = 0 \iff x = x_5 \approx -3{,}099$ lub $x = x_6 \approx 3{,}099$, przy czym $f^{(3)}(x_5) \neq 0 \neq f^{(3)}(x_6)$, innych pierwiastków rzeczywistych to równanie nie ma.

1 pt. Obliczyć $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ oraz $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2 pt. Rozstrzygnąć, czy istnieją pochodne $f'(-1)$, $f'(0)$, $f'(1)$. Istniejące obliczyć.

2 pt. Znaleźć te przedziały, na których funkcja f maleje oraz te, na których rośnie.

2 pt. Znaleźć te przedziały, na których funkcja f jest wypukła oraz te, na których jest wklęsła.

3 pt. Naszkicować wykres funkcji f korzystając z uzyskanych informacji.

---

5. (10 pt.) Obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+\operatorname{tg}(\sin(x))) \cdot ((1+\frac{2}{3}x^2)^{1,5} - \cos(2x) - \operatorname{tg}^2(x\sqrt{3})) \cdot \cos(x^7)}{x \operatorname{ctg}(x) \cdot (\operatorname{tg}(2x) - \sin(2x) - \ln(1+4x^3))}$.

---

6. Niech $A = (1,1,0)$, $B_1 = (10,7,3)$, $D_1 = (9,7,6)$, $C = (16,9,5)$, równoległoboki ABB_1A_1, $ABCD$, ADD_1A_1 są ścianami równoległościanu $ABCDA_1B_1C_1D_1$, odcinki AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 są równoległymi krawędziami tego równoległościanu.

2 pt. Znaleźć współrzędne wierzchołków B, D, A_1 i C_1 równoległościanu $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

2 pt. Znaleźć pole trójkąta AB_1D_1.

2 pt. Znaleźć równanie płaszczyzny $A_1B_1C_1D_1$.

2 pt. Znaleźć objętość czworościanu $AB_1D_1A_1$.

2 pt. Znaleźć kosinus kąta α między wektorami AB_1 i AD_1 i wykazać, że $\alpha < \frac{\pi}{6}$.

Ciekawostki (któż wie, co się może przydać): $(1+x)^a = 1 + ax + \binom{a}{2}x^2 + \binom{a}{3}x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n}x^n$,

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $\quad (\cos x)' = -\sin x$,

$\operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \cdots$. $\quad \ln(1-x) = -\left(x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \dots\right)$.