**Matematyka A, kolokwium, 8 stycznia 2014, 18:30 – 20:30**

*Rozwiązania różnych zadań mają znaleźć się na różnych kartkach, bo sprawdzać je będą różne osoby. Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU imieniem i nazwiskiem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia.*

**Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, musi wyłączyć i schować!** Nie dotyczy rozruszników serca.

*Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!*

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały *udowodnione* na wykładzie lub na ćwiczeniach.

---

Należy przeczytać **CAŁE** zadanie **PRZED** rozpoczęciem rozwiązywania go!

---

**1. (10 pt.)** Obliczyć pochodne następujących funkcji:

**a. (3 pt.)** $\ln\big(\operatorname{ctg}(4x)\big)$, **b. (4 pt.)** $\sqrt[3]{\frac{x-2}{x^2-4x+5}}$ **c. (3 pt).** $y=\big(2+\cos(5x)\big)^{1/(x+1)}$.

---

**2. (3 pt.)** Podać definicję pochodnej funkcji $f$ w punkcie $\pi$.

**(7 pt.)** Obliczyć $f(\pi)$ oraz pochodną $f'(\pi)$, jeśli

$$f(x)=\ln(1+2\sin x)\cdot\cos(x)\cdot\operatorname{tg}^4(\tfrac{x}{3})\cdot\log_{10}\Big(\operatorname{tg}^4(\tfrac{2x}{3})+\sin^4(x)+\cos^4(x)\Big).$$

---

**3.** Niech $f(x)=\sqrt{x^2-1}$, gdy $|x|\geq 1$.

**(1 pt.)** Znaleźć prostą $T_P$ styczną do wykresu funkcji $f$ w punkcie $P=\big(\frac{26}{10},\frac{24}{10}\big)$.

**(3 pt.)** Znaleźć prostą $T_Q$ styczną do wykresu funkcji $f$ w punkcie $Q=\big(q,f(q)\big)$, $q>1$.

**(6 pt.)** Niech $F_r=\big(\sqrt{2},0\big)$, $F_\ell=\big(-\sqrt{2},0\big)$. Udowodnić, że kąt ostry między prostymi $T_P$ i $F_rP$ jest równy kątowi ostremu między prostymi $T_P$ i $F_\ell P$.

---

**4.** Niech $f\colon\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x)=(ax^2+bx+c)e^{\lambda x}$, gdzie $a,b,c,\lambda$ oznaczają ustalone liczby rzeczywiste.

**(3 pt.)** Znaleźć wszystkie takie czwórki liczb $a,b,c,\lambda$, że dla każdej liczby rzeczywistej $x$ zachodzi równość: $(f')'(x)-5f'(x)+6f(x)=0$.

**(3 pt.)** Znaleźć wszystkie takie czwórki liczb $a,b,c,\lambda$ że dla każdej liczby rzeczywistej $x$ zachodzi równość: $(f')'(x)-5f'(x)+6f(x)=e^{2x}$.

**(4 pt.)** Znaleźć wszystkie takie czwórki liczb $a,b,c,\lambda$, że dla każdej liczby rzeczywistej $x$ zachodzi równość: $(f')'(x)-4f'(x)+4f(x)=e^{2x}$.

---

**5. (10 pt.)** Który ze stożków wpisanych w sferę o promieniu $1$ ma największe pole powierzchni bocznej?

*Informacja: jeśli $r$ oznacza promień podstawy stożka, a $\ell$ — jego tworzącą, to pole powierzchni bocznej stożka jest równe $\pi r\ell$.*

---