Matematyka A, kolokwium, 4 grudnia 2013 — rozwiązania

W tym tekście mogą być jakieś błędy. Jeśli ktoś zauważy, proszę o wiadomość.

Ostatnie zmiany wprowadziłem 9 grudnia 2013 r. o godz. 23:16

Należy przeczytać **CAŁE** zadanie **PRZED** rozpoczęciem rozwiązywania go!

---

1. (5 pt.) Znaleźć granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n^{2013}+1304}+n^2\cdot 0{,}99^n}{1000\sqrt[n]{n+2^n}+1525\cdot 0{,}999^n}$.

Rozwiązanie. Ponieważ $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1305}=1$ oraz

$$1\le\sqrt[n]{n^{2013}+1304}\le\sqrt[n]{n^{2013}+1304n^{2013}}=\sqrt[n]{1305}\cdot\left(\sqrt[n]{n}\right)^{2013},$$

więc $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^{2013}+1304}=1$. Z twierdzenia z wykładu wynika, że $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\cdot 0{,}99^n=0$, zatem

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{n^{2013}+1304}+n^2\cdot 0{,}99^n\right)=1\,.$$

Mamy $1\le\sqrt[n]{n+2^n}=\sqrt[n]{2^n+2^n}\le 2\sqrt[n]{2}$, zatem $\lim\limits_{n\to\infty}1000\sqrt[n]{n+2^n}=2000$, a ponieważ $\lim\limits_{n\to\infty}0{,}999^n=0$, więc

$$\lim_{n\to\infty}\left(1000\sqrt[n]{n+2^n}+1525\cdot 0{,}999^n\right)=2000\,.$$

Stąd od razu wynika. że

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n^{2013}+1304}+n^2\cdot 0{,}99^n}{1000\sqrt[n]{n+2^n}+1525\cdot 0{,}999^n}=\frac{1+0}{2000+1525\cdot 0}=\frac{1}{2000}\,.$$

(3 pt.) Znaleźć granicę $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n+\sin n}\cdot\left(\sqrt{n+12\sqrt{n}}-\sqrt{n+31}\right)$.

Rozwiązanie. Ponieważ $-\frac{1}{n}\le\frac{\sin}{n}\le\frac{1}{n}$, więc $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n}=0$. Wobec tego

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n+\sin n}\cdot\left(\sqrt{n+12\sqrt{n}}-\sqrt{n+31}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n+\sin n}\cdot\frac{(\sqrt{n+12\sqrt{n}}-\sqrt{n+31})(\sqrt{n+12\sqrt{n}}+\sqrt{n+31})}{\sqrt{n+12\sqrt{n}}+\sqrt{n+31}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n+\sin n}\cdot\frac{n+12\sqrt{n}-(n+31)}{\sqrt{n+12\sqrt{n}}+\sqrt{n+31}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}n\cdot\sqrt{1+\frac{\sin n}{n}}\cdot\frac{12\sqrt{n}-31}{\sqrt{n+12\sqrt{n}}+\sqrt{n+31}}=\lim_{n\to\infty}n\cdot\sqrt{1+\frac{\sin n}{n}}\cdot\frac{\sqrt{n}\left(12-\frac{31}{\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{12}{\sqrt{n}}}+\sqrt{1+\frac{31}{\sqrt{n}}}\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}n\cdot\sqrt{1+\frac{\sin n}{n}}\cdot\frac{12-\frac{31}{\sqrt{n}}}{\sqrt{1+\frac{12}{\sqrt{n}}}+\sqrt{1+\frac{31}{\sqrt{n}}}}=\infty\cdot 1\cdot\frac{12-0}{1+1}=\infty\cdot 1\cdot 6=\infty\,.$$

(2 pt.) Czy istnieje taka liczba $k\in\mathbb{N}$, że jeśli $n>k$, to

$$\sqrt{n+12\sqrt{n}}-\sqrt{n+31}>\frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{6}}\ ?$$

Rozwiązanie. Ponieważ $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$ (o tym przekonujemy się rysując wysokość w trójkącie równobocznym), więc chodzi o to, czy nierówność $\sqrt{n+12\sqrt{n}}-\sqrt{n+31}>4$ jest spełniona dla wszystkich dostatecznie dużych liczb naturalnych n . Zachodzą równości (użyte przed chwilką)

$\sqrt{n+12\sqrt{n}}-\sqrt{n+31}=\frac{\left(\sqrt{n+12\sqrt{n}}-\sqrt{n+31}\right)\left(\sqrt{n+12\sqrt{n}}+\sqrt{n+31}\right)}{\sqrt{n+12\sqrt{n}}+\sqrt{n+31}}=\frac{12-\frac{31}{\sqrt{n}}}{\sqrt{1+\frac{12}{\sqrt{n}}}+\sqrt{1+\frac{31}{\sqrt{n}}}}$. Wynika stąd, że $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n+12\sqrt{n}}-\sqrt{n+31}=\frac{12}{1+1}=6$. Z definicji granicy ciągu wynika, że istnieje taka liczba k, że jeśli $n>k$, to $\left|\sqrt{n+12\sqrt{n}}-\sqrt{n+31}-6\right|<1$ (w definicji granicy ciągu przyjmujemy $\varepsilon=1$), zatem

$$5<\sqrt{n+12\sqrt{n}}-\sqrt{n+31}<7.$$

Wykazaliśmy istnienie liczby k nie wskazując jej.

Rozumowanie można zakończyć wskazując liczbę k. Nie będę starać się wskazywać małej liczby k. Jeśli $n>31\,000^2$, to $\sqrt{n}>31\,000$, zatem $\frac{12}{\sqrt{n}}<\frac{31}{\sqrt{n}}<\frac{1}{1000}$. Mamy wtedy $\sqrt{n+12\sqrt{n}}-\sqrt{n+31}=\frac{12-\frac{31}{\sqrt{n}}}{\sqrt{1+\frac{12}{\sqrt{n}}}+\sqrt{1+\frac{31}{\sqrt{n}}}}>\frac{12-0{,}001}{2\sqrt{1+0{,}001}}>\frac{11{,}999}{2\cdot 1{,}0005}=\frac{11{,}999}{2{,}001}>4$. Wykazaliśmy, że nierówność ma miejsce dla wszystkich $n>31\,000^2=961\,000\,000$.

Oczywiście to bardzo niedokładne oszacowanie. Można przekonać się, że jeśli $n>193$, to $\sqrt{n+12\sqrt{n}}-\sqrt{n+31}>4$, natomiast $\sqrt{n+12\sqrt{193}}-\sqrt{193+31}<4$. W tym wypadku można wspmóc się jakimś urządzeniem elektronicznum.

---

2. (1 pt.) Niech $a_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\dots+\frac{1}{4n-3}-\frac{1}{4n-2}+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{4n}$ dla $n=1,2,3\dots$. Obliczyć a_1 i a_2. Nie trzeba upraszczać.

Rozwiązanie. $a_1=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$, $a_2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}$.

(1 pt.) Wykazać, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność $a_n<a_{n+1}$.

Rozwiązanie. $a_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\dots+\frac{1}{4n-3}-\frac{1}{4n-2}+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{4n}$, zatem $a_{n+1}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\dots+\frac{1}{4n-3}-\frac{1}{4n-2}+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{4n}+$ $+\frac{1}{4n+1}-\frac{1}{4n+2}+\frac{1}{4n+3}-\frac{1}{4n+4}$, więc $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{4n+1}-\frac{1}{4n+2}+\frac{1}{4n+3}-\frac{1}{4n+4}>0$, bo $4n+1<4n+2$, zatem $\frac{1}{4n+1}>\frac{1}{4n+2}$ i wobec tego $\frac{1}{4n+1}-\frac{1}{4n+2}>0$, podobnie $\frac{1}{4n+3}-\frac{1}{4n+4}>0$.

(1 pt.) Niech $b_n=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\dots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}$ dla $n=1,2,3\dots$. Obliczyć b_1 i b_2. Nie trzeba upraszczać.

Rozwiązanie. $b_1=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}$, $b_2=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}$.

(1 pt.) Wykazać, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność $b_n<b_{n+1}$.

Rozwiązanie. $b_n=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\dots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}$, zatem $b_n=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\dots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{4n+2}-\frac{1}{4n+4}$. Wobec tego $b_{n+1}-b_n=\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{4n+2}-\frac{1}{4n+4}=\frac{1}{4n+2}-\frac{1}{4n+4}>0$, bo $4n+2<4n+4$.

(3 pt.) Wykazać, że $a_n < 1 - \frac{1}{4n}$ i $b_n \le \frac{1}{2} - \frac{1}{4n}$ dla $n = 1, 2, 3 \ldots$.

Rozwiązanie. $a_n = 1 + (-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}) + (-\frac{1}{4} + \frac{1}{5}) + (-\frac{1}{6} + \frac{1}{7}) + (-\frac{1}{8} + \frac{1}{9}) + \cdots + +(-\frac{1}{4n-2} + \frac{1}{4n-1}) - \frac{1}{4n} < 1 - \frac{1}{4n}$, bo w każdym nawiasie znajduje się liczba ujemna. $b_n = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \ldots + +\frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n} = \frac{1}{2} + (-\frac{1}{4} + \frac{1}{6}) + (-\frac{1}{8} + \frac{1}{10} + + \ldots + (-\frac{1}{4n-4} + \frac{1}{4n-2}) - \frac{1}{4n} \le \frac{1}{2} - \frac{1}{4n}$, bo w każdym nawiasie znajduje się liczba ujemna, a nierówność jest nieostra dla $n = 1$, gdyż wtedy nawiasów nie ma.

(3 pt.) Wykazać, że istnieją granice $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2 \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Rozwiązanie. Ciągi mają granice, bo są monotoniczne (niemalejące) i ograniczone z góry: (a_n) przez 1, (b_n) przez $\frac{1}{2}$. Zachodzi równość

$b_{2n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \ldots + + \frac{1}{8n-2} - \frac{1}{8n} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n}\right) = =\frac{1}{2} a_n$. Mamy teraz $\lim\limits_{n\to\infty} b_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, bo granica ciągu $b_2, b_4, b_6, b_8, \ldots$ jest równa granicy ciągu $b_1, b_2, b_3, b_4, \ldots$, co wynika natychmiast z definicji granicy ciągu: jeśli wszystkie wyrazy ciągu (b_n) o dostatecznie dużych numerach leżą blisko granicy, to również, te o dostatecznie dużych numerach parzystych znajdują się blisko niej.

---

3. Obliczyć następujące granice :

a. (2 pt.) $\lim\limits_{n\to\infty} n \ln \frac{5n^2+3n+1}{5n^2+13n+7}$,

b. (2 pt.) $\lim\limits_{n\to\infty} n \sin \frac{3n+1}{5n^2+13n+7}$,

c. (3 pt.) $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{tg}\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$,

d. (3 pt.) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{\frac{3n+1}{13n+7}} - 1\right)$.

Rozwiązanie. Mamy $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5n^2+3n+1}{5n^2+13n+7} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{5+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{5+\frac{13}{n}+\frac{7}{n^2}} = \frac{5+0+0}{5+0+0} = 1$. Skorzystamy z nierówności $\frac{x}{1+x} \le \ln(1+x) \le x$ przyjmując, że $x = \frac{5n^2+3n+1}{5n^2+13n+7} - 1 = \frac{-10n-6}{5n^2+13n+7}$. Ponieważ $|-10n-6| \le 10n+6 < 13n+7 < n^2+13n+7$, więc $x > -1$, co pozwala na korzystanie ze wspomnianej nierówności. Mamy więc:

$$\frac{-10n^2-6n}{5n^2+3n+1} = n\frac{\frac{-10n-6}{5n^2+13n+7}}{\frac{5n^2+3n+1}{5n^2+13n+7}} \le \lim_{n\to\infty} n \ln \frac{5n^2+3n+1}{5n^2+13n+7} \le n\frac{-10n-6}{5n^2+13n+7} = \frac{-10n^2-6n}{5n^2+13n+7}.$$

Z równości $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{-10n^2-6n}{5n^2+3n+1} = -2 = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{-10n^2-6n}{5n^2+13n+7}$ i twierdzenia o trzech ciągach wynika, że $\lim\limits_{n\to\infty} n \ln \frac{5n^2+3n+1}{5n^2+13n+7} = -2$. Zakończyliśmy punkt a.

Skorzystamy teraz z nierówności $\sin x < x < \operatorname{tg} x$, która zachodzi, gdy $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Można ją przepisać w postaci $x\cos x < \sin x < x$ (nierówność $x < \operatorname{tg} x$ pomnożyłem przez $\cos x > 0$). Z tej nierówności wynika, że

$$x - x^3 = x(1-x^2) < x(1-\sin^2 x) = x\cos^2 x < x\cos x < \sin x < x,$$

ta nierówność pojawiła się jakiś czas temu na wykładzie i była powtórzona ostatnio. Ponieważ dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność $\frac{3n+1}{5n^2+13n+7} < \frac{1}{n} \leq 1$, więc

$$\frac{3n^2+n}{5n^2+13n+7}\left(1-\left(\tfrac{1}{n}\right)^2\right) \leq n\cdot\frac{3n+1}{5n^2+13n+7}\left(1-\left(\frac{3n+1}{5n^2+13n+7}\right)^2\right) \leq$$

$$\leq n\sin\frac{3n+1}{5n^2+13n+7} \leq n\frac{3n+1}{5n^2+13n+7} = \frac{3n^2+n}{5n^2+13n+7}$$

Jasne jest, że $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+n}{5n^2+13n+7}\left(1-\left(\frac{1}{n}\right)^2\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{3+\frac{1}{n}}{5+\frac{13}{n}+\frac{7}{n^2}}\left(1-\left(\frac{1}{n}\right)^2\right) = \frac{3+0}{5+0+0}\cdot 1 = \frac{3}{5}$. Podobnie $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+n}{5n^2+13n+7} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{3+\frac{1}{n}}{5+\frac{13}{n}+\frac{7}{n^2}} = \frac{3+0}{5+0+0} = \frac{3}{5}$. Z twierdzenia o trzech ciągach wynika więc, że $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin\frac{3n+1}{5n^2+13n+7} = \frac{3}{5}$.

Udowodnimy, że $\lim\limits_{n\to\infty}\operatorname{tg}\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right) = 0$. Mamy

$$0 < \pi\sqrt{n^2+1} - n\pi = \pi\frac{(\sqrt{n^2+1}-n)(\sqrt{n^2+1}+n)}{\sqrt{n^2+1}+n} = \frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n} < \frac{\pi}{2n} \leq \frac{\pi}{2}.$$

Dla $n \geq 2$ mamy $\frac{\pi}{2n} \leq \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{3}$, zatem $\cos\left(\pi\sqrt{n^2+1}-n\pi\right) > \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$. Ponieważ π jest okresem tangensa, więc $\operatorname{tg}\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right) = \operatorname{tg}\left(\pi\sqrt{n^2+1}-n\pi\right)$. Jeśli $n \geq 2$, to

$$0 < \operatorname{tg}\left(\pi\sqrt{n^2+1}-n\pi\right) = \frac{\sin(\pi\sqrt{n^2+1}-n\pi)}{\cos(\pi\sqrt{n^2+1}-n\pi)} < 2\sin(\pi\sqrt{n^2+1}-n\pi) <$$

$$< 2\cdot(\pi\sqrt{n^2+1}-n\pi) < 2\cdot\frac{\pi}{2n} = \frac{\pi}{n}.$$

Stąd i z twierdzenia o trzech ciągach wynika od razu, że

$$\lim_{n\to\infty}\operatorname{tg}\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right) = \lim_{n\to\infty}\operatorname{tg}\left(\pi\sqrt{n^2+1}-n\pi\right) = 0.$$

Wykażemy teraz, że $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{\frac{3n+1}{13n+7}}-1\right) = \ln\frac{3}{13}$. Dla każdego $n = 1,2,3,\ldots$ zachodzi nierówność $\frac{1}{5} \leq \frac{3n+1}{13n+7} < \frac{3}{13} < 1$. Oznaczmy $y = \frac{3n+1}{13n+7}$. Zachodzą równości $n\left(\sqrt[n]{\frac{3n+1}{13n+7}}-1\right) = n\left(\sqrt[n]{y}-1\right) = n\left(e^{\ln\sqrt[n]{y}}-1\right)$. Skorzystamy z nierówności (jest na końcu tekstu) $1+x \leq e^x \leq \frac{1}{1-x}$ prawdziwej dla $x < 1$. Przyjmiemy $x = \ln\sqrt[n]{y}$. Oczywiście $n\ln\sqrt[n]{y} = \ln y < 0 < 1$, więc

$$\ln\frac{3n+1}{13n+7} = \ln y = n\cdot\ln\sqrt[n]{y} = n\left(1+\ln\sqrt[n]{y}-1\right) \leq n\left(e^{\ln\sqrt[n]{y}}-1\right) \leq$$

$$\leq n\cdot\left(\frac{1}{1-\ln\sqrt[n]{y}}-1\right) = \frac{n\ln\sqrt[n]{y}}{1-\ln\sqrt[n]{y}} = \frac{\ln y}{1-\ln\sqrt[n]{y}} = \ln\frac{3n+1}{13n+7}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{n}\ln y}.$$

Ponieważ $\frac{1}{n}\ln\frac{1}{5} \leq \frac{1}{n}\ln y < \frac{1}{n}\ln\frac{3}{13}$, więc $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln y = 0$. Stąd wynika, że spełniona jest równość $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\ln\frac{3n+1}{13n+7}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{n}\ln y}\right) = \ln\frac{3}{13}\cdot\frac{1}{1-0} = \ln\frac{3}{13}$, a ponieważ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\ln\frac{3n+1}{13n+7}\right) = \frac{3}{13}$, więc na mocy twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{\frac{3n+1}{13n+7}}-1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{y}-1\right) = \ln\frac{3}{13}.$$

.

4. (5 pt.) Obliczyć $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n + (1{,}3)^{3n}}$ i $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n + (1{,}1)^{4n}}$.

Rozwiązanie. Ponieważ $1{,}3^3 = 2{,}197 > 2$, więc

$$2{,}197 < \sqrt[n]{2^n + (1{,}3)^{3n}} < \sqrt[n]{2{,}197^n + 2{,}197^n} = 2{,}197\sqrt[n]{2}$$

Z twierdzenia o trzech ciągach i równości $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = 1$ wynika, że zachodzi równość $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n + (1{,}3)^{3n}} = 2{,}197$.

Następna granica. Zachodzi równość $1{,}1^4 = 1{,}4641 < 2$ (na końcu tekstu są jakieś wzory!). Wynika stąd, że

$$2 < \sqrt[n]{2^n + (1{,}1)^{4n}} < \sqrt[n]{2^n + 2^n} < 2\sqrt[n]{1+1} = 2\sqrt[n]{2}.$$

Stąd, z twierdzenia o trzech ciągach i równości $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = 1$ wynika, że $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n + (1{,}1)^{4n}} = 2$.

(5 pt.) Obliczyć $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^3 \cdot 2^n + n^2 \cdot (1{,}3)^{3n}}$ i $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2 \cdot 2^n + n \cdot (1{,}1)^{4n}}$.

Rozwiązanie. Zaczniemy od niedokładnego stwierdzenia: ciąg geometryczny dominuje nad potęgą ciągu arytmetycznego. Zdanie ma to wyjaśnić, dlaczego akurat tak przekształcamy. Po prostu w tym zadaniu czynniki n^3 i n^2 nie mają znaczenia. Koniec ideologii. Przechodzimy do oszacowań.

$$1{,}3^3 < \sqrt[n]{n^3 \cdot 2^n + n^2 \cdot (1{,}3)^{3n}} <$$
$$< \sqrt[n]{n^3 \cdot (1{,}3^3)^n + n^3 \cdot (1{,}3)^{3n}} = 1{,}3^3 \cdot \sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{2}.$$

Z tej nierówności, z równości $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^3} = 1 = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2}$ oraz z twierdzenia o trzech ciągach wynika, że $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^3 \cdot 2^n + n^2 \cdot (1{,}3)^{3n}} = 1{,}3^3 = 2{,}197$.

W taki sam sposób dowodzimy, że $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^3 \cdot 2^n + n^2 \cdot (1{,}1)^{4n}} = 2$ — tym razem „dominującym czynnikiem” jest 2^n, bo $2 > 1{,}1^4$. Odpowiednie drobne zmiany w uzasadnieniu studentka lub student wprowadzi samodzielnie.

---

5. (4 pt.) Niech $a_0 = \sqrt{2}$ i $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{9}{a_n}\right)$ dla $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Wykazać, że $a_n \geq 3$ oraz $a_{n+1} \leq a_n$ dla $n = 1, 2, 3, \ldots$

Rozwiązanie. Dla $n = 0, 1, 2, \ldots$ zachodzi $a_{n+1} - 3 = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{9}{a_n}\right) - 3 = $ $= \frac{1}{2a_n}\left(a_n^2 + 9 - 6a_n\right) = \frac{1}{2a_n}(a_n - 3)^2 \geq 0$, zatem $a_{n+1} \geq 3$ dla $n = 0, 1, 2, \ldots$, czyli $a_n \geq 3$ dla $n = 1, 2, 3, \ldots$. Mamy też $a_n - a_{n+1} = a_n - \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{9}{a_n}\right) =$ $= \frac{1}{2a_n}\left(a_n^2 - 9\right) \geq 0$ dla $n = 1, 2, 3, \ldots$, bo wtedy $a_n \geq 3$.

(3 pt.) Dowieść, że ciąg (a_n) ma granicę i znaleźć ją.

Rozwiązanie. Ciąg (a_n) ma skończoną granicę, bo jest nierosnący począwszy od a_1 i ograniczony z dołu liczbą $\sqrt{2}$. Istnieje więc $g = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ i $g \geq 3 > 0$. Zachodzi równość $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ — bezpośredni wniosek z definicji granicy. Stąd wynika, że $g = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{9}{a_n}\right) = \frac{1}{2}(g + \frac{9}{g})$. Wobec tego $0 = g - \frac{1}{2}(g + \frac{9}{g}) = \frac{1}{2}g - \frac{9}{2g}$, zatem $g^2 = 9$, a ponieważ $g \geq 3$, więc $g = 3$.

(3 pt.) Niech $g = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Dowieść, że $a_{n+1} - g \leq \frac{1}{6}(a_n - g)^2$ dla $n = 1, 2, 3, \ldots$

Rozwiązanie. Mamy $a_{n+1} - 3 = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{9}{a_n}\right) - 3 = \frac{1}{2a_n}\left(a_n^2 + 9 - 6a_n\right) = \frac{1}{2a_n}\left(a_n - 3\right)^2 \leq \frac{1}{6}\left(a_n - 3\right)^2$, bo dla $n = 1, 2, 3, \ldots$ zachodzi wcześniej udowodniona nierówność $a_n \geq 3$.

Na deser dodajmy, że ciąg z ostatniego zadania bardzo dobrze nadaje się do obliczania pierwiastków kwadratowych (zamiast liczby 9 we wzorze na a_{n+1} można wstawić dowolną liczbę dodatnią a. Otrzymamy wtedy ciąg zbieżny $\sqrt{a}$). Czytelnik może pobawić się kalkulatorem, by zobaczyć jak szybko ciąg się ustabilizuje, czyli różnica między wyrazem ciągu a liczbą $\sqrt{a}$ stanie się mniejsza od liczb zauważalnych przez urządzenie elektroniczne.

Fakciki: $13^2 = 169$; $13^3 = 2197$; $13^4 = 28561$; $11^2 = 121$; $11^3 = 1331$; $11^4 = 14641$; $0 < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin x < x < \operatorname{tg} x$; $x < 1 \Rightarrow 1 + x \leq e^x \leq \frac{1}{1-x}$; $-1 < x \Rightarrow \frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$;