Matematyka A, kolokwium, 4 grudnia 2013, 18:30 – 20:29:29

Rozwiązania różnych zadań mają znaleźć się na różnych kartkach, bo sprawdzać je będą różne osoby.

Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU imieniem i nazwiskiem piszącego, jego nr. indeksu, nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia. **Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; należy je wyłączyć i schować!** Nie dotyczy rozruszników serca. *Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!* Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały *udowodnione* w czasie zajęć .

Należy przeczytać **CAŁE** zadanie **PRZED** rozpoczęciem rozwiązywania go!

---

1. (5 pt.) Znaleźć granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n^{2013}+1304}+n^2\cdot 0{,}99^n}{1000\sqrt[n]{n+2^n}+1525\cdot 0{,}999^n}$.

(3 pt.) Znaleźć granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n+\sin n}\cdot\left(\sqrt{n+12\sqrt{n}}-\sqrt{n+31}\right)$.

(2 pt.) Czy istnieje taka liczba $k\in\mathbb{N}$, że jeśli $n>k$, to

$$\sqrt{n+12\sqrt{n}}-\sqrt{n+31} > \frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{6}} \ ?$$

---

2. (1 pt.) Niech $a_n = 1-\frac12+\frac13-\frac14+\frac15-\frac16+\frac17-\frac18+\dots+\frac{1}{4n-3}-\frac{1}{4n-2}+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{4n}$ dla $n=1,2,3\dots$. Obliczyć a_1 i a_2 . Nie trzeba upraszczać.

(1 pt.) Wykazać, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność $a_n < a_{n+1}$.

(1 pt.) Niech $b_n = 1-\frac12-\frac14+\frac13-\frac16-\frac18+\dots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}$ dla $n=1,2,3\dots$.

Obliczyć b_1 i b_2 . Nie trzeba upraszczać.

(1 pt.) Wykazać, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność $b_n < b_{n+1}$.

(3 pt.) Wykazać, że $a_n < 1-\frac{1}{4n}$ i $b_n \le \frac12-\frac{1}{4n}$ dla $n=1,2,3\dots$.

(3 pt.) Wykazać, że istnieją granice $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2\lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

---

3. Obliczyć następujące granice :

a. (2 pt.) $\lim\limits_{n\to\infty} n\ln\frac{5n^2+3n+1}{5n^2+13n+7}$,

b. (2 pt.) $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin\frac{3n+1}{5n^2+13n+7}$,

c. (3 pt.) $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{tg}\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$,

d. (3 pt.) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{\frac{3n+1}{13n+7}}-1\right)$.

---

4. (5 pt.) Obliczyć $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n+(1{,}3)^{3n}}$ i $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n+(1{,}1)^{4n}}$.

(5 pt.) Obliczyć $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^3\cdot 2^n+n^2\cdot(1{,}3)^{3n}}$ i $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2\cdot 2^n+n\cdot(1{,}1)^{4n}}$.

---

5. (4 pt.) Niech $a_0=\sqrt2$ i $a_{n+1}=\frac12\left(a_n+\frac{9}{a_n}\right)$ dla $n=0,1,2,\dots$.

Wykazać, że $a_n\ge 3$ oraz $a_{n+1}\le a_n$ dla $n=1,2,3,\dots$

(3 pt.) Dowieść, że ciąg (a_n) ma granicę i znaleźć ją.

(3 pt.) Niech $g=\lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Dowieść, że $a_{n+1}-g\le\frac16(a_n-g)^2$ dla $n=1,2,3,\dots$

Fakciki: $13^2=169$; $13^3=2197$; $13^4=28561$; $11^2=121$; $11^3=1331$; $11^4=14641$; $0<x<\frac{\pi}{2}\Rightarrow \sin x<x<\operatorname{tg}x$; $x<1\Rightarrow 1+x\le e^x\le\frac{1}{1-x}$; $-1<x\Rightarrow\frac{x}{1+x}\le\ln(1+x)\le x$;