Matematyka A, kolokwium, 30 października 2013, 18:05 – 19:55

Rozwiązania różnych zadań mają znaleźć się na różnych kartkach, bo sprawdzać je będą różne osoby. Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU nazwiskiem i imieniem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia.

Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, muszą być schowane i wyłączone! Nie dotyczy rozruszników serca.

Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały *udowodnione* na wykładzie lub na ćwiczeniach.

Należy przeczytać **CAŁE** zadanie **PRZED** rozpoczęciem rozwiązywania go!

---

1. (2 pt.) Obliczyć objętość pięciościanu $OKPLQM$, gdzie: $O = (0,0,0)$, $K = (-2,7,26)$, $L = (2,-10,25)$, $M = (3,12,24)$, $P = K + L$, $Q = L + M$.

(3 pt.) Znaleźć $\overrightarrow{OK} \times \overrightarrow{OL}$. Obliczyć pole trójkąta OKL.

(1 pt.) Obliczyć odległość punktu M od prostej OK.

(2 pt.) Obliczyć odległość punktu M od płaszczyzny OKL.

(2 pt.) Który z kątów $\sphericalangle KOL$, $\sphericalangle LOM$, $\sphericalangle MOK$ jest największy, a który — najmniejszy?

---

2. (3 pt.) Podać definicję kosinusa dowolnego kąta $t > 0$.

(4 pt.) Rozwiązać nierówność $16\cos^4 t - 16\cos^2 t + 3 > 0$.

(3 pt.) Zilustrować jej rozwiązanie na okręgu $x^2 + y^2 = 1$. .

---

3. (4 pt.) Podać definicję logarytmu liczby p przy podstawie t. Jakie liczby wolno logarytmować i przy jakich podstawach?

(3 pt.) Wykazać, że: $1 + \frac{1}{2}\log 36 + 4\log 13 < 9\left(\log 2 + \frac{1}{3}\log 3 + \log\sqrt[3]{5}\right) < 6\log 11$.

(3 pt.) Naszkicować w jednym układzie współrzędnych wykresy $y = \log_2 x$ oraz $y = \log_{1/2} x$.

---

4. (2 pt.) Niech $A = (0,0)$, $B = (160,120)$, $C = (176,57)$. Obliczyć pole trójkąta ABC.

(3 pt.) Znaleźć wektor $\overrightarrow{BC}$ i długości wektorów $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ i $\overrightarrow{CA}$.

(3 pt.) Znaleźć punkt, wspólny trzech wysokości trójkąta ABC.

(2 pt.) Znaleźć punkt, wspólny trzech środkowych trójkąta ABC.

---

5. (2 pt.) Niech ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 będą prostymi zdefiniowanymi kolejno za pomocą następujących równań $x + 2y = 10$, $3x - 5y = 30$, $9x - 5y = -30$. Naszkicować proste ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 w układzie współrzędnych na płaszczyźnie.

(2 pt.) Zbiór T_0 składa się z tych punktów (x,y), dla których zachodzą trzy nierówności $x + 2y \le 10$, $3x - 5y \le 30$, $9x - 5y \ge -30$, zbiór T_1 składa się z tych punktów (x,y), dla których zachodzą trzy nierówności $x+2y \ge 10$, $3x-5y \le 30$, $9x-5y \ge -30$, zbiór T_2 składa się z tych punktów (x,y), dla których zachodzą trzy nierówności $x+2y \ge 10$, $3x - 5y \le 30$, $9x - 5y \le -30$. Zaznaczyć na rysunku zbiory T_0, T_1, T_2.

(3 pt.) Znaleźć odległość punktu $(3,1)$ od prostej ℓ_1.

(3 pt.) Niech A_1 będzie punktem wspólnym prostych ℓ_2 i ℓ_3, A_2 — będzie punktem wspólnym prostych ℓ_1 i ℓ_3, A_3 — będzie punktem wspólnym prostych ℓ_1 i ℓ_2. Czy kąt $\sphericalangle A_1A_2A_3$ jest ostry, prosty czy rozwarty?

Ciekawostki (może coś się przyda): $3 \cdot 19 = 57$, $12^2 = 144$, $13^2 = 169$, $11 \cdot 16 = 176$, $16^2 = 256$, $17^2 = 289$, $24 \cdot 25 = 600$, $27^2 = 729$, $37^2 = 1369$, $47^2 = 2209$, $51^2 = 2601$, $57^2 = 3249$, $63^2 = 3969$, $25 \cdot 169 = 4225$, $73^2 = 5329$, $176^2 = 30976$, $11^4 = 14641$, $11^6 = 1771561$, $13^4 = 28561$.