Matematyka A, egzamin, 9 września 2013, 9:05 — 12:05

Rozwiązania różnych zadań mają znaleźć się na różnych kartkach, bo sprawdzać je będą różne osoby.
Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU imieniem i nazwiskiem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia.
Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, muszą być schowane i wyłączone! Nie dotyczy rozruszników serca.
Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!
Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały *udowodnione* na wykładzie lub na ćwiczeniach.

Należy przeczytać **CAŁE** zadanie **PRZED** rozpoczęciem rozwiązywania go!

---

1. **(10 pt.)** Znaleźć wszystkie takie funkcje różniczkowalne $f\colon (0,\infty) \longrightarrow (0,\infty)$, że dla każdego $t>0$ na stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $P=(t,f(t))$ leży punkt postaci $(a,0)=A$, $a>0$ i punkt postaci $(0,b)=B$, $b>0$ przy czym punkt P jest środkiem odcinka AB.

---

2. **(1pt.)** Rozwiązać równanie $\lambda^2+2\lambda-15=0$.

(1 pt.) Znaleźć rozwiązanie ogólne równania $x''(t)+2x'(t)-15x(t)=0$.

(8 pt.) Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$x''(t)+2x'(t)-15x(t)= \\ =60e^{-3t}+60e^{3t}+60e^{5t}+60e^{-5t}+60te^{5t}+60e^{-3t}t+60\cos(3t)+60\sin(3t)+60t+60.$$

---

3. Niech $M=\begin{pmatrix}4&1&1\\-7&-4&-1\\6&6&3\end{pmatrix}$, $\mathbf{v}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$, $\mathbf{w}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

(1 pt.) Znaleźć iloczyny $M\cdot\mathbf{v}$ i $M\cdot\mathbf{w}$.

(6 pt.) Znaleźć rozwiązanie ogólne układu równań $\mathbf{x}'(t)=M\cdot\mathbf{x}(t)$.

(1 pt.) Znaleźć rozwiązanie układu równań $\mathbf{x}'(t)=M\cdot\mathbf{x}(t)$ spełniające warunek $\mathbf{x}(0)=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

(2 pt.) Znaleźć rozwiązanie układu równań $\mathbf{x}'(t)=M\cdot\mathbf{x}(t)$ spełniające warunek $\mathbf{x}(0)=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$.

---

4. **(2 pt.)** Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$x''(t)-2x'(t)+17x(t)=0.$$

(6 pt.) Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$x''(t)-2x'(t)+17x(t)=90+102e^{t}\cos(4t)+102e^{t}\sin(4t)+102e^{4t}\cos(t)+102e^{4t}\sin t+102t.$$

(2 pt.) Znaleźć rozwiązanie zagadnienia początkowego

$$\begin{cases}x''(t)-2x'(t)+17x(t)=90+102e^{t}\cos(4t)+102e^{t}\sin(4t)+102e^{4t}\cos(t)+102e^{4t}\sin t+102t,\\ x(0)=9,\\ x'(0)=\frac{41}{4}.\end{cases}$$

---

5. Niech $f(x,y)=x(2x-y-5)(2x+y-5)$. Wiadomo, że $\frac{\partial f}{\partial x}=25-40x+12x^2-y^2$ oraz $\frac{\partial f}{\partial y}=-2xy$.

(3 pt.) Znaleźć punkty zerowania się gradientu funkcji f.

(3 pt.) Znaleźć lokalne ekstrema funkcji f.

(4 pt.) Znaleźć największą i najmniejszą wartość funkcji f w zbiorze $\{(x,y)\colon\ |x|\le 3, |y|\le 15\}$.

Ciekawostki: $\sqrt{2}\approx 1{,}4142$, $\sqrt{3}\approx 1{,}7321$, $\sqrt{4}=2$, $\sqrt{5}\approx 2{,}2361$, $\sqrt{6}\approx 2{,}4495$, $\sqrt{7}\approx 2{,}6458$, $\sqrt{8}\approx 2{,}8284$, $\sqrt{10}\approx 3{,}1623$, $\sqrt{11}\approx 3{,}3136$, $\sqrt{12}\approx 3{,}4641$, $\sqrt{13}\approx 3{,}6056$, $\sqrt{14}\approx 3{,}7417$, $\sqrt{15}\approx 3{,}8730$, $\sqrt{17}\approx 4{,}1231$,