Matematyka A, egzamin, 25 czerwca 2013, 14:35 — 17:35

Rozwiązania różnych zadań mają znaleźć się na różnych kartkach, bo sprawdzać je będą różne osoby.
Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU imieniem i nazwiskiem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia.
Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, muszą być schowane i wyłączone! Nie dotyczy rozruszników serca.
Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!
Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały *udowodnione* na wykładzie lub na ćwiczeniach.

Należy przeczytać **CAŁE** zadanie **PRZED** rozpoczęciem rozwiązywania go!

---

1. **(10 pt.)** Temperatura ciała zmniejszyła się w ciągu 10 minut ze $100°C$ do $60°C$. Temperatura powietrza równa jest $20°C$. Zgodnie z prawem stygnięcia (Newtona): szybkość zmniejszania się temperatury stygnącego ciała jest proporcjonalna do różnicy temperatur ciała i otoczenia. Po jakim czasie temperatura ciała będzie równa $25°C$?

---

2. **(1pt.)** Rozwiązać równanie $\lambda^2 - \lambda - 12 = 0$.

(1 pt.) Znaleźć rozwiązanie ogólne równania $x''(t) - x'(t) - 12x(t) = 0$.

(8 pt.) Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$x''(t) - x'(t) - 12x(t) = -42e^{-3t} - 42e^{3t} + 432t^2 - 75\cos(3t) - 75\sin(3t).$$

---

3. Niech $M = \begin{pmatrix} 4 & -7 & 6 \\ 1 & -4 & 6 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(1 pt.) Znaleźć iloczyny $M \cdot \mathbf{v}$ i $M \cdot \mathbf{w}$.

(6 pt.) Znaleźć rozwiązanie ogólne układu równań $\mathbf{x}'(t) = M \cdot \mathbf{x}(t)$.

(1 pt.) Znaleźć rozwiązanie układu równań $\mathbf{x}'(t) = M \cdot \mathbf{x}(t)$ spełniające warunek $\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(2 pt.) Znaleźć rozwiązanie układu równań $\mathbf{x}'(t) = M \cdot \mathbf{x}(t)$ spełniające warunek $\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

---

4. **(2 pt.)** Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$x''(t) + 2x'(t) + 50x(t) = 0.$$

(6 pt.) Znaleźć rozwiązanie ogólne równania
$$x''(t)+2x'(t)+50x(t) = -4+14e^{-t}\sin(7t)-197\sin(7t)+14e^{-t}\cos(7t)-197\cos(7t)+1250t^2.$$

(2 pt.) Znaleźć rozwiązanie zagadnienia początkowego

$$\begin{cases} x''(t) + 2x'(t) + 50x(t) = -4 + 14e^{-t}\sin(7t) - 197\sin(7t) + 14e^{-t}\cos(7t) - 197\cos(7t) + 1250t^2, \\ x(0) = 12. \end{cases}$$

---

5. Niech $f(x,y) = \big(x^2+y^2-25\big)\big((x-8)^2+y^2-25\big)$. Wiadomo, że $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x\big((x-8)^2+y^2-25\big)+2(x-8)\big(x^2+y^2-25\big)$ oraz $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y\big((x-8)^2+y^2-25\big) + 2y\big(x^2+y^2-25\big)$.

(3 pt.) Znaleźć punkty zerowania się gradientu funkcji f.

(3 pt.) Znaleźć lokalne ekstrema funkcji f.

(4 pt.) Znaleźć największą i najmniejszą wartość funkcji f w kole $\{(x,y):\ x^2+y^2 \le 25\}$.
