

Rozwiązania różnych zadań mają znaleźć się na różnych kartkach, bo sprawdzać je będą różne osoby.

Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU imieniem i nazwiskiem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia.

**Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, muszą być schowane i wyłączone!** Nie dotyczy rozruszników serca.

*Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!*

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały udowodnione na wykładzie lub na ćwiczeniach.

Należy przeczytać **CAŁE** zadanie **PRZED** rozpoczęciem rozwiązywania go!

1. Niech  $M = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$  i  $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

(2 pt.) Wykazać, że  $\mathbf{v}$  jest wektorem własnym macierzy  $M$  i znaleźć wartość własną  $M$ , której on odpowiada.

(2 pt.) Znaleźć pozostałe wartości własne macierzy  $M$  i odpowiadające im wektory własne.

(2 pt.) Znaleźć wartości macierzy  $M^3$  i **wszystkie** jej wektory własne .

(2 pt.) Znaleźć macierze  $M^3$ ,  $M^{2014}$  i  $M^{-3}$ .

(2 pt.) Czy przekształcenie  $\vec{x} \mapsto M\vec{x}$  przestrzeni  $\mathbb{R}^3$  jest symetrią względem pewnej płaszczyzny?

2. (7 pt.) Znaleźć rozwiązanie ogólne równania  $x'(t) = \frac{2 \sin t \cos t}{4 + \sin^2 t} x(t) + \cos t(4 + \sin^2 t)$ .

(3 pt.) Znaleźć rozwiązanie zagadnienia początkowego  $\begin{cases} x'(t) = \frac{2 \sin t \cos t}{4 + \sin^2 t} x(t) + \cos t(4 + \sin^2 t), \\ x(\frac{\pi}{6}) = \frac{2}{17}. \end{cases}$

3. (1 pt.) Rozwiązać równanie  $\lambda^2 + 2\lambda - 15 = 0$ .

(1 pt.) Znaleźć rozwiązanie ogólne równania  $x''(t) + 2x'(t) - 15x(t) = 0$ .

(8 pt.) Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$x''(t) + 2x'(t) - 15x(t) = -216t^2e^{-3t} + 768t^2e^{3t} + 20e^{5t} - 102 \cos 3t - 15t + 17.$$

4. (3 pt.) Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$x''(t) - 2x'(t) + 10x(t) = 0.$$

(5 pt.) Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$x''(t) - 2x'(t) + 10x(t) = 6e^t \cos(3t) - 6e^t \sin(3t) + 40e^{-t} \sin(3t) + 40.$$

(2 pt.) Znaleźć rozwiązanie zagadnienia początkowego

$$\begin{cases} x''(t) - 2x'(t) + 10x(t) = 6e^t \cos(3t) - 6e^t \sin(3t) + 40e^{-t} \sin(3t) + 40, \\ x(0) = 5, \\ x'(0) = 5. \end{cases}$$

5. (5 pt.) Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$x''(t) - 10x'(t) + 25x(t) = 0.$$

(5 pt.) Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$x''(t) - 10x'(t) + 25x(t) = (t^2 + 1)^{-3/2} e^{5t}.$$