Matematyka A, kolokwium, 15 maja 2013 — rozwiązania

Należy przeczytać **CAŁE** zadanie **PRZED** rozpoczęciem rozwiązywania go!

---

1. Niech $M = \begin{pmatrix} 13 & 8 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$.

(3 pt.) Dowieść, że dla każdej pary liczb całkowitych a, b istnieje taka para liczb wymiernych x, y, że zachodzi równość: $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Czy liczby x, y muszą być całkowite?

(2 pt.) Znaleźć wartości i wektory własne macierzy M oraz macierzy M^2.

(2 pt.) Znaleźć macierz M^{-1} i jej wartości oraz wektory własne.

(3 pt.) Narysować zbiór złożony ze wszystkich punktów postaci $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, gdzie $0 \le x, y \le 1$.

Rozwiązanie: Mamy zbadać układ równań $\begin{cases} 13x + 8y = a, \\ 8x + 5y = b. \end{cases}$ Mnożąc pierwsze z nich przez 5, a drugie przez 8, potem odejmując stronami otrzymujemy $(5 \cdot 13 - 8 \cdot 8)x = 5a - 8b$, czyli $x = 5a - 8b$. Stąd $5y = b - 8(5a - 8b) = 65b - 40a$, więc $y = 13b - 8a$. Stąd wniosek, że jeśli a, b są liczbami całkowitymi, to również liczby x, y są całkowite, tym bardziej wymierne.

Wartości własne są pierwiastkami równania charakterystycznego:

$$0 = \begin{vmatrix} 13-\lambda & 8 \\ 8 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (13-\lambda)(5-\lambda) - 64 = \lambda^2 - 18\lambda + 1 = (\lambda - 9)^2 - 80,$$

więc $\lambda_1 = 9 + \sqrt{80} = 9 + 4\sqrt{5}$ i $\lambda_2 = 9 - \sqrt{80} = 9 - 4\sqrt{5}$. Znajdziemy wektory własne odpowiadające λ_1. Współrzędne u, v wektora własnego $[u, v]$ muszą spełniać oba równania $13u + 8v = (9 + 4\sqrt{5})u$ i $8u + 5v = (9 + 4\sqrt{5})v$, czyli równania $8v = (4\sqrt{5} - 4)u$ i $8u = (4 + 4\sqrt{5})v$. Można je zapisać w postaci $v = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)u$, $v = \frac{2}{\sqrt{5}+1}u = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)\,u$, więc wektory własne odpowiadające wartości własnej $\lambda_1 = 9 + 4\sqrt{5}$ są postaci $\begin{pmatrix} 2u \\ (\sqrt{5}-1)u \end{pmatrix} = u \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{5} - 1 \end{pmatrix}$, gdzie $u \ne 0$. Analogicznie wartości własnej $\lambda_2 = 9 - 4\sqrt{5}$ odpowiadają wektory własne postaci $u\begin{pmatrix} 2 \\ -\sqrt{5} - 1 \end{pmatrix}$, gdzie $u \ne 0$.

Z wzorów $x = 5a - 8b$, $y = 13b - 8a$ wynika od razu, że $M^{-1} = \begin{pmatrix} 13 & 8 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ -8 & 13 \end{pmatrix}$, co zresztą można wywnioskować z wzorów na macierz odwrotną, ale nie ma potrzeby, bo już raz tę macierz znaleźliśmy.

Wartościami własnymi macierzy M^{-1} są liczby $\lambda_1^{-1} = \frac{1}{9+4\sqrt{5}} = 9 - 4\sqrt{5}$ i $\lambda_2^{-1} = \frac{1}{9-4\sqrt{5}} = 9 + 4\sqrt{5}$, a odpowiadają im wektory $u \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{5} - 1 \end{pmatrix}$ oraz $u \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -\sqrt{5} - 1 \end{pmatrix}$, $u \ne 0$.

Mamy $\begin{pmatrix} 13 & 8 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13x + 8y \\ 8x + 5y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 13 \\ 8 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix}$. Dodając wektory stosujemy regułę równoległoboku, więc zbiór, który należało narysować, to równoległobok o wierzchołkach $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 13 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 21 \\ 13 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix}$.

---

2. Niech $A = \begin{pmatrix} -2 & 1,5 & -0,5 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = 2A^2$.

(2 pt.) Znaleźć wartości i wektory własne macierzy A.

(2 pt.) Znaleźć wartości i wektory własne macierzy B^{-1}.

(2 pt.) Znaleźć wartości i **wszystkie** wektory własne macierzy A^3 i macierzy A^{2013}.

(2 pt.) Znaleźć macierze A^3, B^3, B^{-3}, A^{2013} i B^{2013}.

(2 pt.) Niech $F(\overrightarrow{\mathbf{x}}) = A\cdot\overrightarrow{\mathbf{x}}$. Czy F jest symetrią względem punktu $(0,0,0)$ lub względem pewnej płaszczyzny?

Rozwiązanie: Wartości własne to pierwiastki równania charakterystycznego:

$0 = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 1,5 & -0,5 \\ -2 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\big((-2-\lambda)(1-\lambda)+2\cdot 1{,}5\big) = (1-\lambda)(\lambda^2+\lambda+1)$. Wobec tego wartościami własnymi są liczby $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3}) = \frac{1}{2}(-1-i\sqrt{3})$ oraz $\lambda_3 = \frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3})$. Jeśli liczby x, y, z są kolejnymi współrzędnymi wektora własnego odpowiadającego $\lambda_1 = 1$, to spełniony jest układ równań: $\begin{cases} -2x+\frac{3}{2}y-\frac{1}{2}z = x, \\ -2x+\ \ y \qquad\ \ = y, \\ \qquad\qquad\quad z = z. \end{cases}$

Stąd od razu wynika, że $x = 0$ i $z = 3y$, więc wektor własny ma postać $\begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 3y \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Znajdziemy wektory własne odpowiadające $\lambda_2 = \frac{1}{2}(-1-i\sqrt{3})$. Układ równań, który mają spełniać współrzędne x, y, z wektora własnego to $\begin{cases} -2x+\frac{3}{2}y-\frac{1}{2}z = \frac{1}{2}(-1-i\sqrt{3})x, \\ -2x+\ \ y \qquad\ \ = \frac{1}{2}(-1-i\sqrt{3})y, \\ \qquad\qquad\quad z = \frac{1}{2}(-1-i\sqrt{3})z. \end{cases}$

Z trzeciego z tych równań wynika, że $z = 0$. Z drugiego równania otrzymujemy $-2x = \frac{1}{2}(-3-i\sqrt{3})y$, czyli $x = \frac{1}{4}(3+i\sqrt{3})y$. Wektory własne odpowiadające λ_2 mają więc postać $\begin{pmatrix} (3+i\sqrt{3})y \\ 4y \\ 0 \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 3+i\sqrt{3} \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Ponieważ macierz jest rzeczywista, więc wektory własne odpowiadające wartości własnej $\lambda_3 = \overline{\lambda_2}$ otrzymujemy sprzęgając współrzędne wektora odpowiadającego λ_2: $y\begin{pmatrix} 3-i\sqrt{3} \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Wektorami własnymi macierzy B są liczby $(2\lambda_1^2)^{-1} = \frac{1}{2}$, $(2\lambda_2^2)^{-1} = (2\cdot\frac{1}{4}(-2+2i\sqrt{3}))^{-1} = (-1+i\sqrt{3})^{-1} = \frac{1}{4}(-1-i\sqrt{3})$ i $(2\lambda_3^2)^{-1} = (2\overline{\lambda_2}^2)^{-1} = \overline{(2\lambda_2^2)^{-1}} = \overline{\frac{1}{4}(-1-i\sqrt{3})} = \frac{1}{4}(-1+i\sqrt{3})$, a wektory własne im odpowiadające to te, które odpowiadają $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ w przypadku macierzy A.

Wartości własne macierzy A^3 to $\lambda_1^3 = 1$, $\lambda_2^3 = \lambda_2\cdot\lambda_2^2 = \frac{1}{2}(-1-i\sqrt{3})\cdot\frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3}) = \frac{1}{4}+\frac{3}{4} = 1$ oraz $\lambda_3^3 = \overline{\lambda_2}^3 = \overline{\lambda_2^3} = 1$ (zamiast podnosić do sześcianu „na raty" można oczywiście zastosować wzór de Moivre'a, albo wzór na sześcian sumy). Wektory własne to te, które znaleźliśmy dla macierzy A, ale nie tylko, bo suma wektorów własnych odpowiadających tej samej wartości własnej jest wektorem własnym jej odpowiadającym. Niech $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3+i\sqrt{3} \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 3-i\sqrt{3} \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$. Wektorami własnymi macierzy A^3 odpowiadającymi wartości własnej 1 są też $\mathbf{w} = \frac{1}{2}(\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_3) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ oraz $\mathbf{e}_1 = \frac{1}{2i\sqrt{3}}(\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, więc również $\mathbf{e}_2 = \frac{1}{4}(\mathbf{w}-3\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ i $\mathbf{e}_3 = \frac{1}{3}(\mathbf{v}_1-\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Wobec tego $A^3\mathbf{e}_j = \mathbf{e}_j$ dla $j = 1, 2, 3$, więc $A^3 = I$.

Liczba 2013 dzieli się przez 3, więc $A^{2013} = \left(A^3\right)^{2013/3} = I^{2013/3} = I$ (można oczywiście napisać, że $\frac{2013}{3} = 671$, ale ważne jest tylko to, że liczba $\frac{2013}{3}$ jest całkowita!).

Z poprzedniego zdania wynika, że $B^3 = 8(A^3)^2 = 8I$, zatem $B^{-3} = \frac{1}{8}I$, $B^{2013} = (B^3)^{2013/3} =$

$8^{2013/3}I = 2^{2013}I$.

Przekształcenie F symetrią względem punktu $\mathbf{0}$ nie jest, bo wtedy byłoby $F(\overrightarrow{\mathbf{x}}) = -\overrightarrow{\mathbf{x}}$ dla każdego $\overrightarrow{\mathbf{x}}$, więc liczba -1 byłaby wartością własną macierzy A, wbrew naszym ustaleniom.

Przekształcenie F nie jest też symetrią względem płaszczyzny, bo ta płaszczyzna musiałaby przechodzić przez punkt $\mathbf{0}$, bowiem $F(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, a te własność mają jedynie punkty leżące na płaszczyźnie symetrii. Wtedy jednak mielibyśmy do czynienia z płaszczyzną złożoną z wektorów własnych macierzy A, a mamy tylko prostą. (Inny argument: wektory prostopadłe do płaszczyzny symetrii byłyby wektorami własnymi odpowiadającymi wartości własnej -1, a ta liczba wartością własną macierzy A nie jest).

---

3. Niech $C = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(1 pt.) Obliczyć $C \cdot \mathbf{v}$.

(2 pt.) Znaleźć wartości i wektory własne macierzy C.

(3 pt.) Znaleźć wartości i **rzeczywiste** wektory własne macierzy C^3 oraz macierzy C^{-3} .

(2 pt.) Znaleźć macierze C^6 i C^{2013}.

(2 pt.) Niech $G(\overrightarrow{\mathbf{x}}) = C \cdot \overrightarrow{\mathbf{x}}$. Czy przekształcenie G jest obrotem wokół pewnej prostej?

Rozwiązanie: Mamy $C = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Wynika stąd, że liczba $\lambda_1 = 1$ jest wektorem własnym macierzy C, a $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ jest wektorem własnym jej odpowiadającym. Znajdziemy pozostałe wartości własne. Zaczniemy od macierzy $3C$. Mamy $0 = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ 2 & 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$

$= (2-\lambda)\big((2-\lambda)^2+2\big) - (-1)\big(2(2-\lambda)-1\big) + 2\big(4+(2-\lambda)\big) = (2-\lambda)^3 + 6(2-\lambda) + 8 = \mu^3 + 6\mu + 7$, gdzie $\mu = 2-\lambda$. Wiemy, że liczba $3\lambda_1 = 3$ jest wartością własną macierzy $3C$, więc jest pierwiastkiem równania charakterystycznego. Wobec tego liczba $\mu_1 = 2-3 = -1$ jest pierwiastkiem równania: $0 = \mu^3 + 6\mu + 7 = (\mu+1)(\mu^2-\mu+7)$. Pozostałymi pierwiastkami tego równania są liczby $\mu_2 = \frac{1}{2}(1-\sqrt{1-28}\,) = \frac{1}{2}(1-3i\sqrt{3}\,)$ oraz $\mu_3 = \frac{1}{2}(1+\sqrt{1-28}\,) = \frac{1}{2}(1+3i\sqrt{3}\,)$, zatem pozostałymi wartościami własnymi macierzy $3C$ są liczby $3\lambda_2 = 2 - \frac{1}{2}(1-3i\sqrt{3}\,) = \frac{3}{2}(1+i\sqrt{3}\,)$ i $3\lambda_3 = 2 - \frac{1}{2}(1+3i\sqrt{3}\,) = \frac{3}{2}(1-i\sqrt{3}\,)$. Oznacza to, że liczby $\lambda_2 = \frac{1}{2}(1+i\sqrt{3}\,)$ i $\lambda_3 = \frac{1}{2}(1-i\sqrt{3}\,)$ są wartościami własnymi macierzy C.

Jak już wiemy, wektorami własnymi odpowiadającymi $\lambda_1 = 1$ są wektory postaci $t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, gdzie $t \neq 0$.

Jeśli $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ jest wektorem własnym macierzy C odpowiadającym wartości własnej $\lambda_2 = \frac{1}{2}(1+i\sqrt{3}\,)$, to spełnione są równości (równania pomnożyłem przez 3, by zmniejszyć liczbę ułamków):

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = \frac{3}{2}(1+i\sqrt{3}\,)x, \\ 2x + 2y - z = \frac{3}{2}(1+i\sqrt{3}\,)y, \\ -x + 2y + 2z = \frac{3}{2}(1+i\sqrt{3}\,)z. \end{cases}$$

Dodawszy je stronami i podzieliwszy przez 3 otrzymuję $x+y+z = \frac{1}{2}(1+i\sqrt{3}\,)(x+y+z)$, więc $x+y+z = 0$, zatem $x+z = -y$. Stąd wynika, że $-3y = \frac{3}{2}(1+i\sqrt{3}\,)x$, czyli $y = -\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3}\,)x$. Analogicznie $z = -\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3}\,)y$, więc $z = \frac{1}{4}(1+i\sqrt{3}\,)^2 x = \frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3}\,)x$. Wektorem własnym macierzy C odpowiadającym wartości własnej λ_2 jest $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1-i\sqrt{3} \\ -1+i\sqrt{3} \end{pmatrix}$, inne są postaci $t\mathbf{v}_2$, gdzie $t \neq 0$. Ponieważ macierz

C jest rzeczywista i $\lambda_3 = \bar{\lambda}_2$, więc $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1+i\sqrt{3} \\ -1-i\sqrt{3} \end{pmatrix}$ jest wektorem własnym odpowiadającym wartości własnej λ_3, a inne są postaci $t\mathbf{v}_3$, gdzie $t \neq 0$.

Wartościami własnymi macierzy C^3 są oczywiście liczby $\lambda_1^3 = 1^3 = 1$, $\lambda_2^3 = \left(\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})\right)^3 = \left(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ\right)^3 = \cos 180^\circ + i\sin 180^\circ = -1$ oraz liczba $\lambda_3^3 = \overline{\lambda_2^3} = \overline{-1} = -1$, a wektorami własnymi wszystkie wektory postaci $c_1\mathbf{v}_2 + c_2\mathbf{v}_3$, wyjątkiem wektora $\mathbf{0}$. Jest wśród nich wektor $\mathbf{w}_2 = \frac{1}{2}\mathbf{v}_2 + \frac{1}{2}\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ i wektor $\mathbf{w}_3 = \frac{1}{2i}(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$, oba o długości $\sqrt{6}$. Pozostałe rzeczywiste wektory własne macierzy C^3 odpowiadające wartości własnej -1 wyglądają tak $c_1\mathbf{w}_2 + c_2\mathbf{w}_3$, gdzie c_1, c_2 są liczbami rzeczywistymi niezerującymi się równocześnie.

Wartościami własnymi macierzy C^{-3} są odwrotności wartości własnych macierzy C, więc liczby 1, -1 i -1.

Wartościami własnymi macierzy C^6 są liczby $1^2 = 1$, $(-1)^2 = 1$ oraz $(-1)^2 = 1$, a wektorami własnymi wszystkie wektory z wyjątkiem wektora $\mathbf{0}$.

Stąd wnioskujemy, że $C^6 = I$ — wektorami własnymi są m.in. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Wobec tego $C^{2013} = C^{2010} \cdot C^3 = I \cdot C^3 = C^3$. Macierz C^3 można znaleźć podnosząc do potęgi macierz C, co nie jest pracochłonne, bo $C^2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 9 \\ 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, zatem

$$C^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Można też inaczej. Niech $C^3 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ k & l & m \\ p & q & r \end{pmatrix}$. Wtedy

$$C^3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad C^3\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad C^3\begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Zachodzą więc równości $\begin{cases} a+b+c = 1, \\ 2a-b-c = -2, \\ -\sqrt{3}\,b + \sqrt{3}\,c = 0, \end{cases}$ $\begin{cases} k+l+m = 1, \\ 2k-l-m = 1, \\ -\sqrt{3}\,l + \sqrt{3}\,m = \sqrt{3}, \end{cases}$ $\begin{cases} p+q+r = 1, \\ 2p-q-r = 1, \\ -\sqrt{3}\,q + \sqrt{3}\,r = -\sqrt{3}. \end{cases}$

Rozwiązujemy trzy łatwe układy równań liniowych i znajdujemy współczynniki macierzy C^3.

Ostatnia sprawa to wyjaśnienie, czy przekształcenie F jest obrotem. Jeśli jest, to wokół prostej $x = y = z$, bo tylko tych punktów przekształcenie F nie porusza. Wektory $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ leżą w płaszczyźnie $x+y+z=0$, więc prostopadłej do wektora $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Zachodzą równości:

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{\sqrt{3}}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = \cos 60^\circ \mathbf{w}_2 - \sin 60^\circ \mathbf{w}_3,$$

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = \sin 60^\circ \mathbf{w}_2 + \cos 60^\circ \mathbf{w}_3,$$ co dowodzi,

że przekształcenie liniowe F jest obrotem o kąt 60° wokół prostej $x=y=x$.

---

4. (5 pt.) Znaleźć rozwiązanie ogólne równania $tx'(t)+x=\cos t$.

(5 pt.) Znaleźć takie rozwiązanie równania $tx'(t)+x=\cos t$, że $x(0)=1$.

Rozwiązanie: Mamy $\big(tx(t)\big)'=tx'(t)+x(t)=\cos t$, zatem $tx(t)=\int\cos t\,dt=\sin t+C$. Stąd wynika, że $x(t)=\frac{\sin t}{t}+\frac{C}{t}$. Jeśli $C>0$, to $\lim\limits_{t\to 0^+}\big(\frac{\sin t}{t}+\frac{C}{t}\big)=+\infty$, a jeśli $C<0$, to $\lim\limits_{t\to 0^+}\big(\frac{\sin t}{t}+\frac{C}{t}\big)=-\infty$. Jeśli chcemy, by $x(0)=1$, to musi być $C=0$. Wtedy $x(t)=\frac{\sin t}{t}=1-\frac{1}{3!}t^2+\frac{1}{5!}t^4-\frac{1}{7!}t^6+\ldots$. Zadanie zostało rozwiązane.

A teraz nieco inny początek. Zaczynamy od równania jednorodnego $tx'+x=0$, czyli $\frac{x'}{x}=-\frac{1}{t}$. Stąd $\ln|x|=\int\frac{dx}{x}=\int\frac{x'}{x}\,dt=-\int\frac{1}{t}\,dt=-\ln|t|+C$. Wobec tego $x=\pm e^C\frac{1}{t}=K\frac{1}{t}$, gdzie $K=\pm e^C$, dopuszczamy też $K=0$, bo funkcja wszędzie równa 0 też spełnia równanie jednorodne.

Uzmienniamy stałą, czyli szukamy rozwiązania w postaci $K(t)\frac{1}{t}$. Podstawiamy do równania i otrzymujemy $\cos t=t\big(K(t)\frac{1}{t}\big)'+K(t)\frac{1}{t}=tK'(t)\frac{1}{t}+tK(t)\frac{-1}{t^2}+K(t)\frac{1}{t}=K'(t)$. Stąd wynika, że $K(t)=$ $=\int\cos t\,dt=\sin t+k$, zatem rozwiązaniem jest funkcja $\frac{\sin t}{t}+\frac{k}{t}$. Końcówka taka, jak poprzednio.

---

5. Niech $f\colon(0,\infty)\longrightarrow(0,\infty)$ oznacza funkcję różniczkowalną, której pochodna jest dodatnia w każdym punkcie półprostej $(0,\infty)$ i to taką, że styczna do jej wykresu w dowolnym punkcie $(x,f(x))$, $x>0$, przecina dodatnią półoś OX w pewnym punkcie $P(x)$ leżącym między punktami $(0,0)$ i $(x,0)$. Niech $G_f(x)=\{(t,y)\colon\ 0<t<x\ \text{ i }\ 0<y<f(t)\}$, będzie „obszarem pod wykresem funkcji f ograniczonej do dziedziny $(0,x)$”.

(2 pt.) Napisać wzór na pole obszaru $G_f(x)$.

(8 pt.) Znaleźć funkcję f, jeśli wiadomo, że pole trójkąta o wierzchołkach $(x,0)$, $\big(x,f(x)\big)$ i $P(x)$ stanowi $\frac{3}{5}$ pola obszaru $G_f(x)$.

Rozwiązanie: Pole obszaru to $G_f(x)=\int_0^x f(t)\,dt$. Jeśli punkt (u,v) leży na stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $(x,f(x))$, to $\frac{v-f(x)}{u-x}=f'(x)$, bo: „pochodna to współczynnik kierunkowy stycznej.” Jeśli $v=0$ (szukamy punktu wspólnego stycznej i osi OX), to $u-x=\frac{-f(x)}{f'(x)}$. Ponieważ $P(x)=(u,0)$ leży między punktami $(0,0)$ i $(x,0)$, więc $0<\frac{f(x)}{f'(x)}=x-u<x$. Wobec tego pole trójkąta o wierzchołkach $(x,0)$, $\big(x,f(x)\big)$ i $P(x)$ jest równe $\frac{1}{2}\cdot\frac{f(x)}{f'(x)}\cdot f(x)$. Musi więc być spełniona równość:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{f(x)}{f'(x)}\cdot f(x)=\frac{3}{5}\int_0^x f(t)\,dt\,.$$

Różniczkując obie strony tej równości otrzymujemy: $\frac{3}{5}f(x)=\Big(\frac{f(x)^2}{2f'(x)}\Big)'=\frac{2f(x)f'(x)^2-f(x)^2f''(x)}{2f'(x)^2}$, czyli $f(x)f''(x)=\frac{4}{5}f'(x)^2$, co zapisujemy tak: $\frac{f''(x)}{f'(x)}=\frac{4}{5}\frac{f'(x)}{f(x)}$. Całkując obydwie strony otrzymujemy: $\ln f'(x)=\frac{4}{5}\ln f(x)+C_1$, czyli $f'(x)=e^{C_1}f(x)^{4/5}=C_2f(x)^{4/5}$, tzn. $f'(x)f(x)^{-4/5}=C_2$, $C_2>0$. Całkujemy raz jeszcze: $C_2x+C_3=\int f'(x)f(x)^{-4/5}\,dx=5f(x)^{1/5}$, więc $f(x)=\big(\frac{1}{5}(C_2x+C_3)\big)^5$. Założyliśmy, że f jest funkcją dodatnią na półprostej $(0,\infty)$. Wynika stąd, że $0\le\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\big(\frac{C_3}{5}\big)^5$, więc $C_3\ge 0$. Z założenia $0<\frac{f(x)}{f'(x)}=\frac{C_2x+C_3}{C_2}<x$, więc $C_3\le 0$. Wobec tego $C_3=0$, co oznacza, że $f(x)=ax^5$ dla pewnej liczby $a>0$.
