Matematyka A, kolokwium, 15 maja 2013, 18:15 – 20:00

Rozwiązania różnych zadań muszą znaleźć się na różnych kartkach, bo sprawdzać je będą różne osoby. Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU imieniem i nazwiskiem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia.

Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, muszą być schowane i wyłączone! Nie dotyczy rozruszników serca.

Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały *udowodnione* na wykładzie lub na ćwiczeniach.

Należy przeczytać **CAŁE** zadanie **PRZED** rozpoczęciem rozwiązywania go!

---

1. Niech $M = \begin{pmatrix} 13 & 8 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$.

(3 pt.) Dowieść, że dla każdej pary liczb całkowitych a, b istnieje taka para liczb wymiernych x, y, że zachodzi równość: $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Czy liczby x, y muszą być całkowite?

(2 pt.) Znaleźć wartości i wektory własne macierzy M oraz macierzy M^2.

(2 pt.) Znaleźć macierz M^{-1} i jej wartości oraz wektory własne.

(3 pt.) Narysować zbiór złożony ze wszystkich punktów postaci $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, gdzie $0 \le x, y \le 1$.

---

2. Niech $A = \begin{pmatrix} -2 & 1,5 & -0,5 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = 2A^2$.

(2 pt.) Znaleźć wartości i wektory własne macierzy A.

(2 pt.) Znaleźć wartości i wektory własne macierzy B^{-1}.

(2 pt.) Znaleźć wartości i **wszystkie** wektory własne macierzy A^3 i macierzy A^{2013}.

(2 pt.) Znaleźć macierze A^3, B^3, B^{-3}, A^{2013} i B^{2013}.

(2 pt.) Niech $F(\overrightarrow{\mathbf{x}}) = A \cdot \overrightarrow{\mathbf{x}}$. Czy F jest symetrią względem punktu $(0,0,0)$ lub względem pewnej płaszczyzny?

---

3. Niech $C = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(1 pt.) Obliczyć $C \cdot \mathbf{v}$.

(2 pt.) Znaleźć wartości i wektory własne macierzy C.

(3 pt.) Znaleźć wartości i **rzeczywiste** wektory własne macierzy C^3 oraz macierzy C^{-3}.

(2 pt.) Znaleźć macierze C^6 i C^{2013}.

(2 pt.) Niech $G(\overrightarrow{\mathbf{x}}) = C \cdot \overrightarrow{\mathbf{x}}$. Czy przekształcenie G jest obrotem wokół pewnej prostej?

---

4. (5 pt.) Znaleźć rozwiązanie ogólne równania $tx'(t) + x = \cos t$.

(5 pt.) Znaleźć takie rozwiązanie równania $tx'(t) + x = \cos t$, że $x(0) = 1$.

---

5. Niech $f\colon (0,\infty) \longrightarrow (0,\infty)$ oznacza funkcję różniczkowalną, której pochodna jest dodatnia w każdym punkcie półprostej $(0,\infty)$ i to taką, że styczna do jej wykresu w dowolnym punkcie $(x, f(x))$, $x > 0$, przecina dodatnią półoś OX w pewnym punkcie $P(x)$ leżącym między punktami $(0,0)$ i $(x,0)$. Niech $G_f(x) = \{(t,y)\colon \ 0 < t < x \ \text{ i } \ 0 < y < f(t)\}$, będzie „obszarem pod wykresem funkcji f ograniczonej do dziedziny $(0,x)$".

(2 pt.) Napisać wzór na pole obszaru $G_f(x)$.

(8 pt.) Znaleźć funkcję f, jeśli wiadomo, że pole trójkąta o wierzchołkach $(x,0)$, $\big(x, f(x)\big)$ i $P(x)$ stanowi $\frac{3}{5}$ pola obszaru $G_f(x)$.