

Matematyka A, kolokwium, 3 kwietnia 2013, 18:15 — 20:05

Rozwiązania różnych zadań mają znaleźć się na różnych kartkach, bo sprawdzać je będą różne osoby.

Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU imieniem i nazwiskiem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia.

**Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, muszą być schowane i wyłączone!** Nie dotyczy rozruszników serca.

*Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!*

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały udowodnione na wykładzie lub na ćwiczeniach.

---

Należy przeczytać **CAŁE** zadanie **PRZED** rozpoczęciem rozwiązywania go!

---

1. (10 pt.) Niech  $f(x) = \frac{1}{3} \ln(\cos(3x))$  dla  $x \in [-\frac{\pi}{9}, \frac{\pi}{12}]$ . Znaleźć długość wykresu funkcji  $f$ .

---

2. (10 pt.) Rozwiązać równanie  $z^{12} - z^{10} + 4z^8 + 60z^6 - 64z^4 + 256z^2 - 256 = 0$ , tzn. znaleźć wszystkie zespolone rozwiązania tego równania.

---

3. (10 pt.) Znaleźć środek ciężkości bryły, która powstała w wyniku obrotu wokół osi  $OX$  obszaru ograniczonego wykresem funkcji  $y = x(e^x - 1)$  oraz prostymi o równaniach  $x = 0$ ,  $x = 3$  i  $y = 0$

---

4. (10 pt.) Obliczyć pole powierzchni, która powstała w wyniku obrotu o kąt  $2\pi$  wykresu funkcji  $y = 15 + \sqrt{4 - (x - 5)^2}$ ,  $5 \leq x \leq 6$  wokół osi  $OY$ .

---

5. (10 pt.) Przedstawić w postaci  $x + yi$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$  liczby  $(2 + i)(3 - 4i)(1 + 2i)$ ,  $\frac{75 - 25i}{4 + 3i}$  oraz

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{13} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^{27}.$$

---

Ciekawostki (któż wie, co się może przydać):  $2^3 = 8$ ,  $3^2 = 9$ ,  $4^3 = 64$ ,  $5^4 = 625$ ,  $6^5 = 7776$ ,  $7^6 = 117649$ ,  $8^7 = 2097152$ ,  $9^8 = 43046721$ ,  $10^9 = 1000000000$ ,  $11^{10} = 25937424601$ ,  $12^{11} = 362797056000$ ,  $13^{12} = 3169126500000$ ,  $14^{13} = 37961270000000$ ,  $15^{14} = 500000000000000$ ,  $16^{15} = 10541350000000000$ ,  $17^{16} = 232146850000000000$ ,  $18^{17} = 5843529600000000000$ ,  $19^{18} = 150094635000000000000$ ,  $20^{19} = 5120000000000000000000$ ,  $2^3 = 8$ ,  $3^2 = 9$ ,  $4^3 = 64$ ,  $5^4 = 625$ ,  $6^5 = 7776$ ,  $7^6 = 117649$ ,  $8^7 = 2097152$ ,  $9^8 = 43046721$ ,  $10^9 = 1000000000$ ,  $11^{10} = 25937424601$ ,  $12^{11} = 362797056000$ ,  $13^{12} = 3169126500000$ ,  $14^{13} = 37961270000000$ ,  $15^{14} = 500000000000000$ ,  $16^{15} = 10541350000000000$ ,  $17^{16} = 232146850000000000$ ,  $18^{17} = 5843529600000000000$ ,  $19^{18} = 150094635000000000000$ ,  $20^{19} = 5120000000000000000000$ ,  $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ ,  $\cos \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ ,  $\sin \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ .