

**Matematyka A, egzamin, 21 lutego 2013, 16:05 – 19:05**

Rozwiązania kolejnych zadań należy pisać na różnych kartkach, bo sprawdzać je będą różne osoby.

Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU imieniem i nazwiskiem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia.

**Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, musi wyłączyć i schować!** Nie dotyczy rozruszników serca.

*Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!*

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały udowodnione na wykładzie lub na ćwiczeniach.

---

Należy przeczytać **CAŁE** zadanie **PRZED** rozpoczęciem rozwiązywania go!

---

1. **3 pt.** Zdefiniować  $\log_c a$  pamiętając o założeniach o liczbach  $a$  i  $c$ .

**7 pt.** Rozwiązać równanie  $\log_{10}(x-5) + \log_{10}(x-8) - \frac{1}{3} \log_{10} 8 = 1 + \frac{1}{2} \log_{10} 49 - \log_{10}(x+4)$ .

---

2. **3 pt.** Podać definicję kosinusa, sinusa i tangensa dowolnego kąta dodatniego.

**4 pt.** Rozwiązać nierówność  $8 \cos^4 t - 10 \cos^2 t + 3 < 0$ .

**3 pt.** Zilustrować jej rozwiązanie na okręgu  $x^2 + y^2 = 1$ .

---

3. **10 pt.** Obliczyć pole obszaru ograniczonego przez proste  $y = -\frac{12}{\pi}$ ,  $x = \frac{\pi}{6}$ ,  $x = \frac{\pi}{4}$  oraz wykres funkcji  $y = \sin x \cos x \sin(\sin x)$ .

---

4. Niech  $f(x) = \sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)^2}$ . Dla  $x \notin \{0, 1, 2\}$  zachodzą wtedy równości:

$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}(x-1)^{-1/3}(x-2)^{-1/3}(5x^2 - 9x + 2)$  oraz

$f''(x) = \frac{2}{9}x^{-5/3}(x-1)^{-4/3}(x-2)^{-4/3}(5x^4 - 18x^3 + 16x^2 - 4)$ .

$5x^2 - 9x + 2 = 0 \iff x = x_1 = \frac{9-\sqrt{41}}{10} \approx 0,26$  lub  $x = x_2 = \frac{9+\sqrt{41}}{10} \approx 1,54$ ,

$5x^4 - 18x^3 + 16x^2 - 4 = 0 \iff x = x_3 \approx -0,41$  lub  $x = x_4 \approx 2,25$ ,  $f^{(3)}(x_3) \neq 0 \neq f^{(3)}(x_4)$ .

**3 pt.** Rozstrzygnąć, czy istnieją pochodne  $f'(0)$ ,  $f'(1)$ ,  $f'(2)$ . Istniejące obliczyć.

**2 pt.** Znaleźć te przedziały, na których funkcja  $f$  maleje oraz te, na których rośnie.

**2 pt.** Znaleźć te przedziały, na których funkcja  $f$  jest wypukła oraz te, na których jest wklęsła.

**3 pt.** Naszkicować wykres funkcji  $f$  korzystając z uzyskanych informacji.

---

5. **(10 pt.)** Znaleźć granicę  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(2 + \operatorname{tg} x) \cdot (1 + x^2 + \cos(x\sqrt{2}) - 2\cos(x^{44}))\sqrt{1 + \operatorname{tg}(\sin x)}}{\ln(1 + \operatorname{tg} x) \cdot 2^{\sin(3x) - \operatorname{tg} x} \cdot (\operatorname{tg} x + \sin x - 2\ln(1 + x) - x^2)}$ .

---

6. Niech  $A = (0, 0, 0)$ ,  $B = (8, 1, 4)$ ,  $D = (7, 4, 4)$ ,  $A_1 = (6, 2, 9)$ ,  $C = B + D$ .

**2 pt.** Znaleźć pozostałe trzy wierzchołki równoległoscianu  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ .

**2 pt.** Znaleźć pole trójkąta  $ABC$ .

**2 pt.** Znaleźć równanie płaszczyzny  $A_1 B_1 C_1$ .

**2 pt.** Znaleźć objętość pięścioscianu  $ABCA_1 B_1 C_1 D_1$ .

**1 pt.** Znaleźć kosinus kąta między prostymi  $AD$  i  $AA_1$ .

**1 pt.** Znaleźć najmniejszą z liczb  $\|X - Y\|$ , gdzie  $X$  to punkt prostej  $AC$ , a  $Y$  — prostej  $B_1 D_1$ .

---

Ciekawostki (któż wie, co się może przydać):  $(1+x)^a = 1 + ax + \binom{a}{2}x^2 + \binom{a}{3}x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n}x^n$ ,

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ ,  $(\sin x)' = \cos x$ ,

$\operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \dots$ .  $\ln(1-x) = -(x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \dots)$ .

---