Matematyka A, egzamin, 5 lutego 2013, 16:05 – 19:05

Rozwiązania kolejnych zadań należy pisać na różnych kartkach, bo sprawdzać je będą różne osoby. Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU imieniem i nazwiskiem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia.

Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, musi wyłączyć i schować! Nie dotyczy rozruszników serca.

Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały *udowodnione* na wykładzie lub na ćwiczeniach.

Należy przeczytać **CAŁE** zadanie **PRZED** rozpoczęciem rozwiązywania go!

---

1. 3 pt. Zdefiniować $\log_z y$ pamiętając o założeniach o liczbach z i y.

7 pt. Rozwiązać równanie $\log_{10}(x-5)+\log_{10}(x-2)+\frac{2}{5}\log_{10}(27\cdot 9)=4\log_{10}\sqrt{6}-\log_{10}(x-6)$.

---

2. 3 pt. Podać definicję kosinusa, sinusa i tangensa dowolnego kąta dodatniego.

4 pt. Rozwiązać nierówność $8\sin^4 t-10\sin^2 t+3<0$.

3 pt. Zilustrować jej rozwiązanie na okręgu $x^2+y^2=1$.

---

3. 10 pt. Obliczyć pole obszaru ograniczonego przez proste $y=-\frac{1}{\pi}$, $x=\frac{\pi}{6}$, $x=\frac{\pi}{4}$ oraz wykres funkcji $y=\sin x\cos x\cos(\sin x)$.

---

4. Niech $f(x)=\sqrt[3]{x^2(1-x)(x-2)^2}$. Dla $x\notin\{0,1,2\}$ zachodzą wtedy równości:

$f'(x)=-\frac{1}{3}x^{-1/3}(1-x)^{-2/3}(x-2)^{-1/3}(5x^2-10x+4)$ oraz

$f''(x)=\frac{2}{9}x^{-4/3}(1-x)^{-5/3}(x-2)^{-4/3}(5x^4-20x^3+22x^2-4x-4)$.

$5x^2-10x+4=0\iff x=x_1=\frac{5-\sqrt{5}}{5}\approx 0{,}55$ lub $x=x_1=\frac{5+\sqrt{5}}{5}\approx 1{,}45$,

$5x^4-20x^3+22x^2-4x-4=0\iff x=x_3\approx -0{,}31$ lub $x=x_4\approx 2{,}31$, $f^{(3)}(x_3)\neq 0\neq f^{(3)}(x_4)$.

3 pt. Rozstrzygnąć, czy istnieją pochodne $f'(0)$, $f'(1)$, $f'(2)$. Istniejące obliczyć.

2 pt. Znaleźć te przedziały, na których funkcja f maleje oraz te, na których rośnie.

2 pt. Znaleźć te przedziały, na których funkcja f jest wypukła oraz te, na których jest wklęsła.

3 pt. Naszkicować wykres funkcji f korzystając z uzyskanych informacji.

---

5. (10 pt.) Znaleźć granicę $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)\cdot(\sqrt{1+x^2}+\cos x-2\cos(x^{2013}))\sqrt{1+\sin(\operatorname{tg} x)}}{2^{\sin(3x)-\operatorname{tg} x}\cdot(\operatorname{tg} x-\sin x+\frac{1}{2}\ln(1-x^3))}$.

---

6. Niech $A=(0,0,0)$, $B=(7,4,4)$, $D=(9,6,2)$, $A_1=(1,4,8)$, $C=B+D$.

2 pt. Znaleźć pozostałe trzy wierzchołki równoległościanu $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

2 pt. Znaleźć pole równoległoboku $ABCD$.

2 pt. Znaleźć równanie płaszczyzny $A_1B_1C_1$.

2 pt. Znaleźć objętość równoległościanu $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

1 pt. Znaleźć kosinus kąta między prostymi AD i AA_1.

1 pt. Znaleźć najmniejszą z liczb $\|X-Y\|$, gdzie X to punkt prostej AC, a y — prostej B_1D_1.

Ciekawostki (któż wie, co się może przydać): $(1+x)^a=1+ax+\binom{a}{2}x^2+\binom{a}{3}x^3+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n}x^n$,

$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $\big(\sin x\big)'=\cos x$,

$\operatorname{tg} x=x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\frac{17}{315}x^7+\cdots$. $\ln(1-x)=-\big(x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{4}x^4+\ldots\big)$.