Matematyka A, kolokwium, 9 stycznia 2013, 18:05 – 20:00

Rozwiązania różnych zadań mają znaleźć się na różnych kartkach, bo sprawdzać je będą różne osoby. Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU imieniem i nazwiskiem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia.

Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, musi wyłączyć i schować!

Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały *udowodnione* na wykładzie lub na ćwiczeniach.

Należy przeczytać **CAŁE** zadanie **PRZED** rozpoczęciem rozwiązywania go!

---

1. Niech $w(x) = 3x^4 - 16x^3 - 6x^2 + 48x$ dla $x \in \mathbb{R}$.

(6 pt.) Znaleźć te przedziały, na których funkcja f jest ściśle rosnąca oraz te na których jest ściśle malejąca.

(4 pt.) W zależności od $a \in \mathbb{R}$ znaleźć liczbę takich $x \in \mathbb{R}$, dla których $f(x) = a$.

---

2. (10 pt.) Znaleźć granicę
$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{1}{\cos^2 x} - \cos^2 x + \ln\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)\cdot \sqrt[2013]{1+2013x^{2013}}}{\left(\sqrt{1+2x} - \sqrt[3]{1+3x}\right)^2 \cdot \cos(x^{2013})}.$$

---

3. (10 pt.) Wykazać, że istnieje taka liczba $\delta > 0$, że z nierówności $0 < x < \delta$ wynika nierówność
$$1 + \ln(1+x) < \sqrt{1+2x}.$$

---

4. Niech $\varphi(x) = \sqrt[3]{x^2(x-1)(x+2)}$ dla $x \in \mathbb{R}$. Wiadomo, że jeśli $x \notin \{-2, 0, 1\}$, to zachodzą wzory $\varphi'(x) = \frac{1}{3}x^{-1/3}(x-1)^{-2/3}(x+2)^{-2/3}(4x^2+3x-4)$ oraz
$\varphi''(x) = \frac{2}{9}\,(2x^4 + 3x^3 - 10x^2 - 4)x^{-4/3}(x-1)^{-5/3}(x+2)^{-5/3}$.

Wiadomo również, że $4x^2 + 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = x_1 \approx -1{,}443$ lub $x = x_2 \approx 0{,}693$ oraz że $2x^4 + 3x^3 - 10x^2 - 4 = (x - x_3)(x - x_4)(2x^2 + px + q)$, gdzie $x_3 \approx -3{,}15082$, $x = x_4 \approx 1{,}744$ a p i q są takimi liczbami rzeczywistymi, że $p^2 < 8q$.

(2 pt.) Znaleźć $\varphi'(-2)$, $\varphi'(0)$ i $\varphi'(1)$ lub wykazać, że niektóre z tych pochodnych nie istnieją.

(2 pt.) Znaleźć te przedziały, na których funkcja φ rośnie i te, na których maleje.

(2 pt.) Znaleźć te przedziały, na których funkcja φ jest wypukła i te, na których jest wklęsła, znaleźć punkty przegięcia funkcji φ.

(1 pt.) Rozstrzygnąć, czy isnieją takie $a, b \in \mathbb{R}$, że $\lim_{x\to\infty}(\varphi(x) - ax - b) = 0$.

(3 pt.) W oparciu o uzyskane informacje naszkicować wykres funkcji φ.

---

5. (10 pt.) Niech A oznacza zbiór złożony z tych wszystkich punktów (x, y), dla których $xy = 8$ i $x > 0$. W zbiorze A znaleźć punkt leżący najbliżej punktu $\left(13, \frac{19}{2}\right)$.

Ciekawostki (któż wie, co się może przydać): $(1+x)^a = 1 + ax + \binom{a}{2}x^2 + \binom{a}{3}x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n}x^n$,

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $\quad \big(\cos x\big)' = -\sin x$,

$\operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \cdots$, $1 = \cos^2 x + \sin^2 x$.