Matematyka A, kolokwium, 5 grudnia 2012, 18:05 – 19:59, rozwiązania

1. (2 pt.) Sformułować twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej.

(3 pt.) Niech $f(x) = \mathrm{arctg}(2+x) + \mathrm{arctg}(2-x)$. Wykazać, że jeśli $x, y \in \mathbb{R}$ i $x \neq y$, to
$$|f(x) - f(y)| < |x-y| .$$

(3 pt.) Niech $a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n-1} + \frac{1}{n+n}$ dla $n = 1, 2, 3, \ldots$. Dowieść, że $1 > a_{n+1} > a_n$ dla każdej liczby naturalnej n.

(2 pt.) Wykazać, że ciąg o wyrazie $f(a_n) = \mathrm{arctg}(2+a_n) + \mathrm{arctg}(2-a_n)$ ma granicę skończoną $g \in (1, 2)$.

Rozwiązanie. Niech $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ oznacza funkcję ciągłą, różniczkowalną we wszystkich punktach przedziału otwartego (a, b). Istnieje wtedy taka liczba $c \in (a, b)$, że $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Mamy $f'(x) = \frac{1}{1+(2+x)^2} - \frac{1}{1+(2-x)^2}$. Obie liczby są dodatnie i żadna z nich nie jest większa od 1. Ich różnica ma więc wartość bezwzględną mniejszą od 1. Wobec tego $|f'(x)| < 1$ dla każdej liczby $x \in \mathbb{R}$. Dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$, $x \neq y$ istnieje takie $c_{x,y}$, że $f'(c_{x,y}) = \frac{f(x)-f(y)}{x-y}$, czyli $f(x) - f(y) = f'(c_{x,y})(x-y)$, $c_{x,y}$ leży między x i y. Stąd wynika, że
$$|f(x) - f(y)| = |f'(c_{x,y})| \cdot |x-y| < |x-y| .$$
Bez założenia $x \neq y$ nie można udowodnić ostrej nierówności.

Zajmujemy się teraz następnym punktem. Mamy
$$a_{n+1} - a_n = \tfrac{1}{2n+2} + \tfrac{1}{2n+1} - \tfrac{1}{n+1} = \tfrac{1}{2n+1} - \tfrac{1}{2n+2} > 0 .$$
Wynika stąd, że $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots$, czyli: ten ciąg jest ściśle rosnący. Mamy również
$$a_n = \tfrac{1}{n+1} + \tfrac{1}{n+2} + \cdots + \tfrac{1}{n+n-1} + \tfrac{1}{n+n} < n \cdot \tfrac{1}{n+1} < 1 ,$$
więc ciąg jest ograniczony z góry przez 1. Ma więc granicę $\hat{g}$, która jest większa od każdego wyrazu ciągu i nie jest większa od 1. Mamy zatem $1 \geq \hat{g} > \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{37}{60} > \frac{36}{60} = \frac{3}{5}$. Stąd już wynika, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność $a_n < \hat{g} \leq 1$.

Choć nie ma potrzeby, możemy ją wzmocnić. Mamy
$$a_{5n} = \tfrac{1}{5n+1} + \ldots + \tfrac{1}{5n+n} + \tfrac{1}{6n+1} + \ldots + \tfrac{1}{6n+n} + \tfrac{1}{7n+1} + \ldots + \tfrac{1}{7n+n} + \tfrac{1}{8n+1} + \ldots + \tfrac{1}{8n+n} + \tfrac{1}{9n+1} + \ldots + \tfrac{1}{9n+n} <$$
$$< n \cdot \tfrac{1}{5n+1} + n \cdot \tfrac{1}{6n+1} + n \cdot \tfrac{1}{7n+1} + n \cdot \tfrac{1}{8n+1} + n \cdot \tfrac{1}{9n+1} < \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{9} = \tfrac{1879}{2520} < \tfrac{189}{252} = \tfrac{3}{4} .$$
Ponieważ ciąg jest ściśle rosnący, więc dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność $a_n < \frac{3}{4}$.

Jeśli chcielibyśmy ją wzmocnić jeszcze bardziej, nie męcząc się zbytnio, możemy wspomóc się logarytmami*. Wiemy, że dla każdej liczby $x > -1$ zachodzi nierówność $\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$. Z niej wynika, że dla każdej liczby naturalnej zachodzi nierówność $\frac{1}{n+1} = \frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} \leq \ln(1+\frac{1}{n}) \leq \frac{1}{n}$. Mamy więc
$$a_n = \tfrac{1}{n+1} + \tfrac{1}{n+2} + \cdots + \tfrac{1}{n+n-1} + \tfrac{1}{n+n} \leq \ln(1+\tfrac{1}{n}) + \ln(1+\tfrac{1}{n+1}) + \ldots + \ln(1+\tfrac{1}{2n-2}) + \ln(1+\tfrac{1}{2n-1}) =$$
$$= \ln\left(\tfrac{n+1}{n} \cdot \tfrac{n+2}{n+1} \cdot \ldots \cdot \tfrac{2n-1}{2n-2} \cdot \tfrac{2n}{2n-1}\right) = \ln 2 .$$
Dodajmy, że zachodzi nierówność $\ln 2 < 0{,}7$, bowiem $e^{0{,}7} > 1 + 0{,}7 + \frac{1}{2!}0{,}7^2 + \frac{1}{3!}0{,}7^3 = 1 + \frac{4200+1470+343}{6000} = 1 + \frac{6013}{6000} > 2$ — skorzystaliśmy z nierówności $e^x \geq 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3$ spełnionej dla każdego $x > 0$, której dowód przypominamy. Dla każdej liczby $x > 0$ mamy $e^x \geq 1 + x$, więc też $e^{x/n} \geq 1 + \frac{x}{n}$ dla $n \in \mathbb{N}$. Wobec tego nierówność $e^x = \left(e^{x/n}\right)^n \geq \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ zachodzi dla $n \in \mathbb{N}$ oraz $x > 0$. Dla $n \geq 3$ mamy
$$e^x \geq \left(1 + \tfrac{x}{n}\right)^n \geq 1 + n\tfrac{x}{n} + \tfrac{n(n-1)}{2!}\left(\tfrac{x}{n}\right)^2 + \tfrac{n(n-1)(n-2)}{3!}\left(\tfrac{x}{n}\right)^3 =$$
$$= 1 + x + \tfrac{1}{2!}\left(1 - \tfrac{1}{n}\right)x^2 + \tfrac{1}{3!}\left(1 - \tfrac{1}{n}\right)\left(1 - \tfrac{2}{n}\right)x^3 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 + x + \tfrac{1}{2!}x^2 + \tfrac{1}{3!}x^3 ,$$
więc dla każdej liczby $x > 0$ zachodzi nierówność $e^x \geq 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3$. *Por. koniec.*

---

* Jeśli pamiętamy o nich to i owo ...

Przechodzimy do ostatniej części. Z nierówności $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ wynika, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi $|f(\hat{g}) - f(a_n)| < |\hat{g} - a_n|$. Z tego, że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \hat{g}$, wynika, że $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f(\hat{g})$. Wystarczy więc zdefiniować $g = \lim\limits_{n\to\infty} \hat{g}$, by otrzymać żądany wniosek.

Została jeszcze do dowodu nierówność $1 < g < 2$. Udowodnimy, że $1 < g$. Wiele razy skorzystamy z tego, że funkcja arctg jest ściśle rosnąca na całej prostej, co wynika z tego, że funkcja tg jest ściśle rosnąca na przedziale $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Mamy $0{,}6 < \hat{g} < 0{,}7$, więc $0 < \hat{g}-0{,}6 < 0{,}1$. Stąd $|f(0{,}6)-g| = |f(0{,}6)-f(\hat{g})| < |\hat{g}-0{,}6| < 0{,}1$. Wobec tego $f(0{,}6) = \operatorname{arctg} 2{,}6 + \operatorname{arctg} 1{,}4 > \operatorname{arctg} \sqrt{3} + \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{12} > \frac{7}{4} = 1{,}75$. Stąd wnioskujemy, że $g = f(\hat{g}) > 1{,}75 - 0{,}1 = 1{,}65 > 1$.

Nierówności $g < 2$ nie udowodnimy, bo — jak wykażemy na końcu — jest nieprawdziwa. Udowodnimy natomiast, że $g < 3$. Mamy
$g = f(\hat{g}) = \operatorname{arctg}(2+\hat{g})+f(2-\hat{g}) < \operatorname{arctg}(2{,}7)+\operatorname{arctg}(1{,}4) < \operatorname{arctg}(2{,}7)+\operatorname{arctg}(\sqrt{3}\,) = \operatorname{arctg}(2{,}7)+\frac{\pi}{3}$.
Z nierówności $\sqrt{3} < c < 2 + \hat{g} < 2{,}7$ wynika, że $\frac{1}{1+c^2} < \frac{1}{1+3} = \frac{1}{4}$. Stąd i z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej zastosowanego do funkcji arctg mamy $\operatorname{arctg} 2{,}7 < \operatorname{arctg} \sqrt{3}+\frac{1}{4}(2{,}7-\sqrt{3}\,) < \frac{\pi}{3}+\frac{1}{4}$.
Stąd $g = f(\hat{g}) < \operatorname{arctg}(2{,}7)+\frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{3}+\frac{1}{4}+\frac{\pi}{3} = \frac{1}{12}(8\pi+3) < \frac{1}{12}(8\cdot 3{,}15+3) = \frac{1}{4}(8\cdot 1{,}05+1) = \frac{9{,}4}{4} < 3$.

Teraz wykażemy, że $g > 2$.* Skorzystamy z wzoru

$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} = \frac{\sin x\cos y + \sin y \cos x}{\cos x \cos y - \sin x \sin y} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x}\frac{\cos y}{\cos y} + \frac{\sin y}{\cos y}\frac{\cos x}{\cos x}}{\frac{\cos x \cos y}{\cos x \cos y} - \frac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y}} = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}.$$

Ponieważ $\hat{g} < 0{,}7$ i dla $x > 0$ zachodzi nierówność $f'(x) < 0$, więc

$$g = f(\hat{g}) = \operatorname{arctg}(2+\hat{g}) + \operatorname{arctg}(2-\hat{g}) > \operatorname{arctg}(2+0{,}7) + \operatorname{arctg}(2-0{,}7),$$

zatem wystarczy udowodnić, że $\operatorname{arctg}(2+0{,}7) + \operatorname{arctg}(2-0{,}7) > 2$. Mamy

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}(2+0{,}7) + \operatorname{arctg}(2-0{,}7)\right) = \frac{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 2{,}7)+\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 1{,}3)}{1-2{,}7\cdot 1{,}3} = \frac{2{,}7+1{,}3}{1-3{,}51} = -\frac{4}{2{,}51} \approx -1{,}5936.$$

Stąd, z definicji funkcji arctg i okresowości tangensa (z okresem π) wynika następująca równość: $\operatorname{arctg}(2+0{,}7) + \operatorname{arctg}(2-0{,}7) = \operatorname{arctg}(-\frac{4}{2{,}51}) + \pi$. Wobec tego

$$2 < \tfrac{2}{3}\pi = -\tfrac{1}{3}\pi + \pi = \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) + \pi < \operatorname{arctg}(-\tfrac{4}{2{,}51}) + \pi = f(0{,}7) < f(\hat{g}) = g.$$

Udowodniliśmy, że $g = f(\hat{g}) > 2$.

Dodajmy, że $g = f(\hat{g}) \approx 2{,}1329$, więc wartość ta jest tylko troszeczkę większa od 2, co zmusza do w miarę dokładnego szacowania liczby g. Z kolei $\frac{2}{3}\pi \approx 2{,}0944$, więc różnica między naszym przybliżeniem tej granicy i nią samą jest mniejsza niż $0{,}04$.

Uwaga. Nierówność $e^x \geq 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3$ można uzasadnić inaczej i uzyskać więcej. Niech $f_n(x) = e^x - \left(1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n\right)$ dla $n = 1, 2, 3, \ldots$. Zachodzi równość

$$f_n'(x) = e^x - \left(1 + x + \tfrac{1}{2!}x^2 + \tfrac{1}{3!}x^3 + \ldots + \tfrac{1}{(n-1)!}x^{n-1}\right) = f_{n-1}(x).$$

Ponieważ $f_2'(x) = f_1(x) = e^x - (1+x) > 0$ dla $x > 0$, więc funkcja f_2 jest ściśle rosnąca na półprostej $[0,\infty)$. Wynika stąd, że jeśli $x > 0$, to $f_2(x) > f_2(0) = 0$, zatem $f_3'(x) = f_2(x) > 0$. Wynika stąd, że funkcja f_3 jest ściśle rosnąca na półprostej $[0,\infty)$ i wobec tego $f_3(x) > f_3(0) = 0$ dla $x > 0$. Wynika stąd, że funkcja f_4 jest ściśle rosnąca itd. Kontynuacja postępowania prowadzi do wniosku: dla każdej liczby $x > 0$ i każdego naturalnego n zachodzi nierówność $f_n(x) > 0$. To rozumowanie pojawiło się na wykładzie 10 grudnia 2012 r. ■

*Tego wcale nie planowałem, porównanie tej granicy z liczbą 2 jest moim zadaniem za trudne na kolokwium, ale nacisnąłem sąsiedni klawisz i nie zauważyłem, co się stało.